



ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Я.И. ГРАНОВСКИЙ

**ДИСПЕРСИОННАЯ ТЕОРИЯ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

ТАРТУ 1966

Тартуский государственный университет

Кафедра теоретической физики

Я.И.Грановский

ДИСПЕРСИОННАЯ ТЕОРИЯ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Тарту 1966

Arch.

York District  
KALAMAZOO

11971

PRINTED

## Предисловие

В основу этой монографии положен материал лекций, прочитанных автором в Казахском университете в 1960 г. и в Тарту в 1963 г. Фактическое содержание лекций почти полностью совпадает с тем, которое излагается во всех современных руководствах по квантовой электро- или мезо-динамике.

Существенным отличием является использование т.н. дисперсионного метода. По сравнению с обычной методикой, основанной на уравнениях движения и диаграммах Фейнмана, этот метод представляется более удобным. Во-первых, он не нуждается в аппарате квантования полей, что сразу же упрощает дело. Во-вторых, он оперирует непосредственно с матричным элементом изучаемого процесса. Необходимые приближения могут быть сделаны после общего анализа, что невозможно сделать в рамках обычной методики. Кроме того, всегда остается возможность взять какие-либо константы или даже функции из опыта. В-третьих, все характеристики изучаемых объектов могут быть непосредственно измерены, т.е. являются физическими и не содержат никаких бесконечностей. Изгнание этого бича физических теорий является, по-видимому, наибольшим достижением дисперсионного метода. В этом смысле очень поучительным является вычисление поправки Швингера к магнитному моменту электрона /см. §8 /, на всем протяжении которого мы оперируем с конечными величинами.

Обычно дисперсионный метод связывают со сложными задачами сильных взаимодействий. Однако, он настолько общий и мощный, что решение задач квантовой электродинамики с его помощью может быть значительно упрощено.

Автор надеется, что эта попытка привлечет внимание специалистов и поможет дальнейшему развитию этого направления.

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории элементарных частиц в течение последних лет привело к созданию нового мощного метода рассмотрения задач, опирающегося на аналитические свойства волновых функций. Характерной чертой этого подхода, обычно называемого дисперсионным, является полное отсутствие таких понятий как лагранжиан, энергия взаимодействия и т.п. Все многообразие явлений физики квантованных полей характеризуется матрицей рассеяния, обладающей рядом формальных свойств, таких, как лоренц-инвариантность, унитарность, спектральность и аналитичность, и подчиняющейся законам сохранения энергии-импульса, момента, изоспина и т.д.

Такая общность в постановке задачи не была достигнута ни в одном из ранее существовавших методов. Вместе с тем до сих пор отсутствует изложение теории элементарных частиц, основанное на дисперсионном методе. Попытка построить такую схему предпринята в настоящей работе.

В процессе изучения физических явлений мы не вдавались в строгое математическое обоснование применяемых методов, как обычно принято в теоретической физике. Вообще, математическая строгость изложения, как правило, приносилась в жертву физической ясности и простоте расчета. Конечно, такая методика может привести к ошибочным выводам при анализе новых физических явлений, в которых еще не раскрыта роль различных факторов, но она вполне правомерна в тех случаях, когда физическая картина в достаточной степени ясна. Именно такими вопросами и ограничена настоящая статья.

Отобранный материал разбит на главы, посвященные

электромагнитным, ядерным и слабым взаимодействиям. В каждой из них рассмотрены наиболее типичные процессы, при изучении которых лучше всего проявляются характерные черты изучаемого вида взаимодействия. Изложению предшествует глава, посвященная общим принципам теории.

## I глава. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

### §1. Основные принципы квантовой теории поля

Метод теории элементарных частиц - это квантовая теория поля. Иначе говоря, каждая частица рассматривается как квант соответствующего ей поля. Все процессы, в которых эта частица участвует, разлагаются на простейшие - рождение и уничтожение частиц. В этом и состоит отличие данного метода от квантовой механики. Если в последней мы имеем дело с данными, неизменяющимися частицами, то в квантовой теории поля /а значит и в теории элементарных частиц/ частицы могут образовываться и уничтожаться. Соответственно, вместо волновой функции  $\psi(x)$  от одной /или нескольких, в общем случае/ переменной мы вводим более общую характеристику - вектор состояния  $\Phi$ .

Каждое состояние характеризуется числом частиц, которые в этом состоянии находятся, но так как в квантовой теории поля это число переменное, то вектор состояния представляется суперпозицией волновых функций, отличающихся числом частиц

$$\Phi = C_0 \psi_0 + C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \dots \quad (1,1)$$

Число частиц в состоянии, обозначенном  $\psi_n$ , равно  $n$ . В соответствии с общими принципами квантовой теории, вероятность найти  $n$  частиц в состоянии  $\Phi$  равна  $|C_n|^2$ <sup>1)</sup>

Очевидно, что задание коэффициентов  $C_n$  полностью определяет состояние системы, а вместе с тем и вектор

---

<sup>1)</sup> Предполагается, что волновые функции  $\psi_n$  ортогональны и нормированы.



состояния  $\Phi$ . Поэтому часто характеризуют состояние набором этих коэффициентов  $\{C_n\}$  <sup>2)</sup>. Вероятно, следует добавить, что при задании этих коэффициентов необходимо, кроме количества частиц, указать и другие характеристики: импульс каждой частицы, ее массу, заряд /или другие квантовые числа/, - иначе говоря, состояние должно быть полностью охарактеризовано заданием всех необходимых квантовых чисел. Условимся все эти характеристики включать в один индекс  $n$ . Каждый раз, когда это необходимо, содержание, вкладываемое в этот индекс, будет рассматриваться особо.

Задачи, которые рассматриваются в квантовой механике, содержатся в данной теории как частный случай. Действительно, если известно, что частицы не превращаются друг в друга, то все  $C_n = 0$ , кроме одного,  $C_{n_0} \neq 0$ . Поэтому необходимо только изучить строение функции  $\Psi_{n_0}$ , и это позволит определить все свойства данного состояния. Для этой цели служит уравнение Шредингера, которому удовлетворяет  $\Psi_{n_0}$ . Полезно, однако, иметь в виду, что методы, развиваемые в квантовой теории поля, могут быть с большой выгодой использованы в квантовой механике так как они являются /вообще говоря/ более мощными <sup>3)</sup>.

Наоборот, задачи квантовой теории поля и теории элементарных частиц, в частности, характеризуются изменением коэффициентов  $C_n$  - частицы переходят друг в друга. Поэтому эти задачи ставятся так: даны коэффициенты  $C_n^0$ , характеризующие начальное состояние  $\Phi_{n_0}$ ;

---

2) Конечно, множество  $\{C_n\}$  есть вектор состояния в новом представлении, характеризуемом функциями  $\Psi_n$ . Это представление называется представлением вторичного квантования.

3) Применение полевых методов в задаче многих тел значительно упрощает рассмотрение таких вопросов, как сверхпроводимость, уточнение метода Хартри-Фока и т.п.

определить  $C_n$  в конечном состоянии. Иначе говоря, если написать

$$C_n = \sum_m S_{nm} C_m^0, \quad (1,2)$$

то задача состоит в определении коэффициентов  $S_{nm}$ , связывающих начальное и конечное состояния. Эти величины образуют матрицу  $S$ , называемую матрицей рассеяния. Если эта матрица известна, то можно определить исход всевозможных процессов взаимодействия.

Действительно, пусть дано, что в начальном состоянии только один коэффициент  $C_{m_0}^0$  был отличен от нуля. Согласно (1,2), в результате взаимодействия получится состояние  $\Phi$ , такое, что в нем возможны разные числа частиц. Вероятность найти в этом состоянии  $n$  частиц равна

$$P_n = |C_n|^2 = |S_{nm_0}|^2. \quad (1,3)$$

Итак, постановка задачи ясна: мы фиксируем начальное и конечное состояния и ищем вероятность перехода  $P_{nm} = |S_{nm}|^2$ .

Теперь необходимо составить уравнение, из которого можно определить элементы  $S$ -матрицы. В квантовой механике для этого служит уравнение Шредингера

$$i\hbar \dot{\Phi} = \hat{H} \Phi, \quad (1,4)$$

где  $\hat{H}$  - оператор Гамильтона. Этот метод, однако, крайне непрактичен, так как даже в случае двух тел точно могут быть решены только 4 задачи: ротатор, осциллятор, движение в кулоновском или однородном магнитном поле. Все остальные задачи точно не решаются и необходимо искать подходящие приближенные методы, которые в каждом конкретном случае могут резко отличаться друг от друга. Существует и общий приближенный метод - теория возмущений, пригодный в том случае, когда энергия взаимодействия мала.

Все эти трудности только усугубляются в квантовой теории поля. Рассматриваемые ею задачи также,

вообще говоря, точно неразрешимы <sup>4)</sup>.

Более того, метод теории возмущений применим только в случаях слабой связи. Таким образом, в квантовой теории поля нет общего метода решения ее задач. Мы не упоминаем о чисто "техническом" вопросе - необходимости записать (1,4) в релятивистски инвариантном виде. Эта задача была решена лишь в 1948 г., хотя квантовая теория поля возникла около 1927 г. Один этот срок показывает, сколь трудна была даже эта задача, являющаяся лишь "технической". Пример другой задачи представляет формулировка оператора Гамильтона, включающего в себя энергию взаимодействия как реально существующих, так и отсутствующих, но могущих родиться, частиц <sup>5)</sup>.

Рейзенбергу принадлежит идея рассматривать  $S$ -матрицу как самостоятельный физический объект, не сводя ее к гамильтониану [2]. Плодотворность этой идеи может быть оправдана, если с помощью одной  $S$ -матрицы удастся получить те физические следствия, которые получаются из гамильтоновой теории. Первым успехом на этом пути был вывод формулы Брейта-Вигнера для сечений резонансных реакций. Позже /1955 г./ Боголюбов и Ширков показали, что  $S$ -матрица содержит в себе всю схему теории возмущений /если связь слаба/ и может быть подходящим инструментом для выхода за рамки теории возмущений [3]. В настоящее время жизнеспособность предло-

---

4) Построен, правда, ряд моделей теории [1], допускающих точное решение; однако, неизвестно, отражают ли эти модели общую структуру квантовой теории поля.

5) Эта задача была решена путем введения представления о виртуальных частицах и операторах поля. К сожалению, эта идея может быть проведена только для свободных полей, так как свойства оператора взаимодействия поля могут быть определены лишь после решения уравнений. Выход из этого затруднения дает теория возмущений, но она, вообще говоря, не годится.

женного Гейзенбергом подхода не вызывает сомнений.

Какие общие требования предъявляются к аппарату  $S$ -матрицы? Это, прежде всего, релятивистская инвариантность. Теория должна строиться таким образом, чтобы во всех инерциальных системах отсчета она имела одинаковую структуру. Поскольку инерциальные системы связаны друг с другом преобразованиями Лоренца, необходимо, чтобы  $S$ -матрица была лоренц-инвариантной, с точностью до унитарного преобразования. Итак, если преобразование Лоренца  $U$  переводит вектор состояния  $\phi$  в  $\phi'$ :

$$\phi' = U \phi, \quad (1,5)$$

то

$$S' = U S U^*. \quad (1,6)$$

Второе требование, предъявляемое к  $S$ -матрице, - унитарность. Два условия нормировки вероятностей

$$\sum_n |C_n|^2 = \sum_m |C_m^0|^2 = 1 \quad (1,7)$$

согласно (1,2) накладывают на  $S_{nm}$  требование

$$\sum_n |C_n|^2 = \sum_{nkl} S_{nk} C_k^0 S_{nl}^* \tilde{C}_l^0 = \sum_l C_l^0 \tilde{C}_l^0,$$

так что

$$\sum_n S_{nk} S_{nl}^* = \delta_{kl}. \quad (1,8)$$

Вводя эрмитово сопряженную матрицу

$$(S^+)_{ln} = S_{nl}^*, \quad (1,9)$$

можем записать (1,8) в виде матричного уравнения

$$S^+ S = 1 \quad (1,10)$$

Это и есть математическое выражение условия унитарности. Его физический смысл ясен: это сохранение вероятности. Поэтому совокупность состояний, доступных

системе после взаимодействия, столь же полна, как и система состояний до взаимодействия.

Третье требование – причинность. Физическое условие причинности утверждает, что всякое воздействие одного события на другое может распространяться в будущее и притом не быстрее, чем со скоростью света.

Первая часть этого утверждения выражает необратимость времени, а вторая исключает сверхсветовые скорости.

Условие причинности позволяет сделать некоторые заключения о математической природе матричных элементов. Рассмотрим для этого фурье-образ матричного элемента

$$F(E) = \int F(t) e^{iEt} dt. \quad (1,11)$$

Благодаря причинности  $F(t)=0$  при  $t < 0$ <sup>6)</sup>, так что интегрирование в (1,11) производится по области  $t > 0$ . Придадим теперь энергии положительную мнимую часть ( $\eta > 0$ )

$$E = E_0 + i\eta. \quad (1,12)$$

Очевидно, что  $F(E)$  при этом будет определяться следующим интегралом Фурье. Этого достаточно для доказательства аналитичности амплитуды  $F(E)$ . Конечно, аналитичность имеет место лишь в верхней полуплоскости, так как  $\text{Im } E > 0$ . Итак, фурье-образ запаздывающей амплитуды аналитичен в верхней полуплоскости энергии. Аналогично, фурье-образ опережающей амплитуды аналитичен в нижней полуплоскости энергии. Строгое доказательство этих утверждений значительно сложнее изложенной здесь схемы, так как в действительности интегралы в уравнении (1,11) являются многомерными.

---

<sup>6)</sup> Такая амплитуда называется запаздывающей.

Утверждение об аналитичности некоторых матричных элементов  $S$ -матрицы удалось доказать Боголюбову с сотрудниками [4] путем довольно тонких рассуждений. Сводка всех результатов имеется в докладе Ширкова на Киевской конференции [5].

## §2. Общий вид дисперсионных соотношений

В предыдущем параграфе уже указывалось, что требования ковариантности, унитарности и причинности, наложенные на  $S$ -матрицу, позволяют - в случае слабой связи - получить все результаты теории возмущений [3]. Мы пойдем по этому пути дальше и попытаемся извлечь из этих принципов дальнейшую информацию.

Таким образом, излагаемая теория уже не является гамильтоновой. Тем не менее, в ней явно выполняются такие основные законы, как сохранение энергии-импульса, момента количества движения, правильно отображаются причинные взаимосвязи.

Чтобы не отклоняться в сторону математических усложнений мы в дальнейшем предположим, что вся  $S$ -матрица является аналитической функцией энергии, хотя это не доказано и, возможно, не совсем правильно.

Обозначим энергию системы буквой  $\omega$  /этому понятию в дальнейшем будет дано релятивистски инвариантное определение / и попытаемся математически выразить аналитические свойства матричного элемента  $A(\omega)$  какого-либо определенного процесса.

В комплексной плоскости  $\omega$  /см.рис. 1/ аналитическая функция  $A(\omega)$  удовлетворяет уравнению Коши

$$A(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{A(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} . \quad (2,1)$$

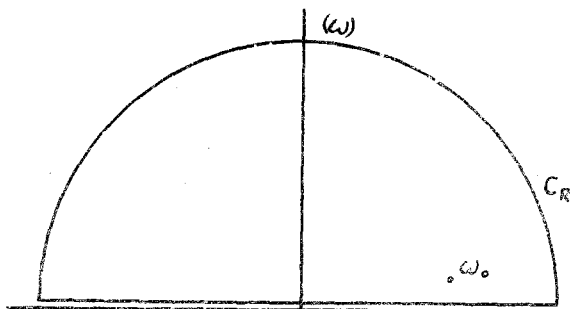


Рис. 1

Конкретизируем выбор контура интегрирования, взяв его в виде вещественной оси и замыкающего его сверху полукруга. Предположим далее, что при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$   $A(\omega)$  стремится к нулю столь быстро, что интеграл Коши сохраняет смысл. Тогда, устремив радиус полукруга к бесконечности, получим

$$A(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0}. \quad (2,2)$$

Теперь будем сдвигать точку  $\omega_0$  к вещественной оси. Уравнение (2,2) останется справедливым, если только  $\omega_0$  остается выше вещественной оси, т.е.  $\text{Im } \omega_0 = \varepsilon > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом

$$A(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega) d\omega}{\omega - (\omega_0 + i\varepsilon)} \quad (2,3)$$

$\omega_0$  — вещественное число. Легко показать, что если разбить  $A(\omega)$  на вещественную и мнимую части, то их вклады в интеграл совпадают. Вследствие этого

$$A(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } A(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0 - i\varepsilon}. \quad (2,4)$$

Равенство (2,4) является основным соотношением всей развиваемой далее теории. Оно может быть написано в различных формах. Например, можно взять контур интегрирования таким, как на

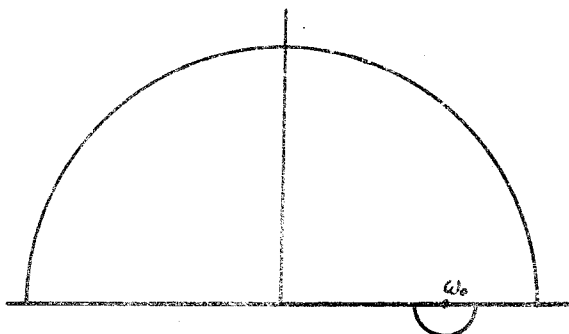


Рис. 2

рис. 2, т.е. окружить точку  $\omega_0$  небольшим полукругом снизу. Тогда интеграл по этому полукругу равен

$$\int \frac{\text{Im } A(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = i\pi \text{Im } A(\omega_0)$$

и

$$A(\omega_0) = i \text{Im } A(\omega_0) + \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \frac{\text{Im } A(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \quad (2,5)$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{Re } A(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \frac{\text{Im } A(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \quad (2,5)$$

Контур  $C_1$  получается из вещественной оси, если из нее исключить бесконечно-малый участок, симметрично окружающий точку  $\omega_0$ . Такой способ взятия интеграла, содержащего особую точку при  $\omega = \omega_0$  называется интегрированием в смысле главного значения. Из сравнения (2,4) и (2,5) следует, что под интегралом мы можем заменить



$$\frac{1}{\omega - \omega_0 - i\varepsilon} = i\pi\delta(\omega - \omega_0) + P \frac{1}{\omega - \omega_0} . \quad (2,7)$$

Буква  $P$  означает, что следующую за ней функцию надо интегрировать в смысле главного значения. В дальнейшем мы часто будем для простоты опускать слагаемое  $-i\varepsilon$  в знаменателе. При этом во избежание ошибок следует иметь в виду, что в зависимости от того, что вычисляется —  $A(\omega)$  или  $\text{Re } A(\omega)$  — следует выбирать соответствующий контур интегрирования.

Мнимая часть амплитуды  $\mathcal{T}_m A$  может быть найдена из условия унитарности  $S$ -матрицы. Для этого заметим, что амплитуда процесса, получается из

$$S = 1 + iT \quad (2,8)$$

как матричный элемент матрицы  $\mathcal{T}$ :

$$A = \langle f | \mathcal{T} | i \rangle \quad (2,9)$$

/символ  $|i\rangle$  обозначает вектор начального состояния  $\Phi_i$ , а  $\langle f| = \Phi_f^*$  — эрмитово сопряженный вектор конечного состояния  $f$ . Запишем теперь условие унитарности

$$1 = S^* S = (1 - iT^*)(1 + iT) = 1 - iT^* + iT + \mathcal{T}^* \mathcal{T},$$

откуда

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}^* = i \mathcal{T}^* \mathcal{T}. \quad (2,10)$$

Беря матричный элемент этого равенства, получим

$$\mathcal{T}_m \mathcal{T}_{fi} = \frac{1}{2} \langle f | \mathcal{T}^* \mathcal{T} | i \rangle . \quad (2,11)$$

Это можно преобразовать, вводя суммирование по промежуточным состояниям, если они образуют полную систему:

$$\mathcal{T}_m \mathcal{T}_{fi} = \frac{1}{2} \sum_n \langle f | \mathcal{T}^* | n \rangle \langle n | \mathcal{T} | i \rangle . \quad (2,12)$$

В качестве такой системы обычно берут ту же совокупность состояний, которая фигурирует в формулировке начальных состояний.

Строго говоря, полная система состояний  $|n\rangle$  включает все мыслимые сочетания частиц, в любых количествах и с любыми энергиями, моментами и т.д. Практически, однако, эта безграничная совокупность обрывается /как правило, без строгого обоснования/ на небольшом числе членов, доступных вычислению. Только в некоторых случаях можно привести соображения в пользу такой операции. Так, при изучении ядерных процессов можно не учитывать состояния, включающие легкие частицы, так как связь между ними и ядерными частицами крайне слаба. В других случаях пренебрегают состояниями, содержащими фотоны, если можно не учитывать вклад электромагнитных сил.

Сумма по состояниям в уравнении (2,12) несколько упрощается при учете законов сохранения. Действительно,  $\mathcal{T} \neq 0$  только в том случае, когда  $\mu_i = \mu_f$ , где  $\mu_i$  - 4-мерный импульс состояния  $\Phi_i$ . Поэтому  $\mathcal{T}$ -матрица имеет вид

$$\langle f | \mathcal{T} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(\mu_i - \mu_f) \langle f | T | i \rangle. \quad (2,13)$$

Подставив это в уравнение (2,12), получим

$$\mathcal{U}_m T_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(\mu_i - \mu_n) \langle f | T^* | n \rangle \langle n | T | i \rangle. \quad (2,14)$$

Следовательно, в мнимую часть амплитуды вносят вклад только те состояния, которые имеют тот же 4-мерный импульс, что и начальное состояние.

Очевидно, если имеют место другие законы сохранения, то из  $T$ -матрицы можно выделить дополнительные множители типа  $\delta$ -функций, которые войдут также в уравнение (2,14). Поэтому в качестве промежуточных состояний могут входить только те, которых можно достичь из начального состояния при выполнении всех законов сохранения.

Мы пришли, таким образом, к следующей системе уравнений

$$T_{ik}(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } T_{ik}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \quad (2,15)$$

$$\text{Im } T_{ik}(\omega_0) = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(p_i - p_n) T_{in}^+ T_{nk}$$

с помощью которой следует вычислять амплитуды рассеяния.

До сих пор, однако, неизвестно, достаточно ли уравнений (2,15) для определения всех амплитуд. Ниже мы увидим, что при учете только некоторых низших состояний информация, содержащаяся в них, достаточна для определения простейших амплитуд. В полном же объеме этот вопрос придется оставить без ответа. Не исключено, что учет более высоких состояний потребует ввести дополнительные требования, например, требование аналитичности по другим аргументам, входящим в амплитуду. Именно так поступил Мандельштам [6], потребовав аналитичности амплитуды по инвариантной передаче импульса. Мы также будем в дальнейшем пользоваться унитарностью во всех каналах, описываемых данным матричным элементом.

В заключение покажем, как с помощью амплитуд вычислять сечения процессов. По определению, сечение процесса равно отношению его вероятности, рассчитанной на единицу времени, к плотности потока падающих частиц

$$d\sigma = dw/j$$

$$dw = |T|^2 d\Gamma_f / \Delta t. \quad (2,16)$$

В этом выражении учтено, что при заданном импульсе  $p_f$  число конечных состояний равно  $d\Gamma_f$ . В  $T$  входит  $\delta$ -функция, определяемая как предел

$$\delta^4(p_i - p_f) = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ix(p_i - p_f)} d^4x. \quad (2,17)$$

Если  $p_i \neq p_f$ , то этот предел равен нулю. Если же  $p_i = p_f$  то

$$\delta^4(p_i - p_f) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{V \Delta t}{(2\pi)^4}. \quad (2,18)$$

Область интегрирования будем считать ограниченной. Предполагаем, что объем  $V$ , на который нормированы векторы состояния частиц, равен единице. Тогда

$$\frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)}{\Delta t} \rightarrow 1 \quad (2,19)$$

и

$$d\sigma = \frac{|T|^2}{f} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) d\Gamma_f. \quad (2,20)$$

Если в формуле (2,15) взять  $i = k$ , т.е. рассмотреть амплитуду упругого рассеяния вперед, то получим

$$\mathcal{T}_m T_{upr} = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(p_i - p_n) |T_{in}|^2. \quad (2,21)$$

Поскольку в сумме по  $n$  автоматически учитываются все  $d\Gamma_n$  состояний, то

$$\mathcal{T}_m T_{upr} = \frac{1}{2} i \sigma_{tot}, \quad (2,22)$$

где  $\sigma_{tot}$  обозначает полное сечение всех процессов, идущих из данного начального состояния. Соотношение (2,22) носит название оптической теоремы. В случае двух частиц его чаще записывают иначе, вводя вместо  $T$ -матрицы амплитуду

$$f = \frac{e_1 e_2}{2\pi E} T. \quad (2,23)$$

Здесь  $e_1$  и  $e_2$  — энергии сталкивающихся частиц,  $E = e_1 + e_2$ .

Выразим сечение упругого рассеяния через ампли-

туду  $\varphi$  . Статистический вес конечного состояния

$$d\Gamma_{\varphi} = \frac{d\vec{p}_1 \cdot d\vec{p}_2}{(2\pi)^6} \quad (2,24)$$

преобразуется к виду

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p) \frac{d\vec{p}_1 \cdot d\vec{p}_2}{(2\pi)^6} = \delta(e_1 + e_2 - E) \frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3} = \frac{\mu^2 d\Omega}{(2\pi)^4 \left| \frac{\partial \mu}{\partial p}(e_1, e_2) \right|} = \frac{\mu e_1 e_2 d\Omega}{(2\pi)^6 E}.$$

Кроме того,

$$j = \sigma_{\text{отн}} = \frac{\mu}{e_1} + \frac{\mu}{e_2} = \frac{\mu E}{e_1 e_2},$$

так что

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \frac{e_1 e_2}{E} \right)^2 |T|^2 d\Omega = |f|^2 d\Omega. \quad (2,25)$$

Находя мнимую часть  $f$  , получим

$$\text{Im} f = \frac{1}{4\pi} \mu \sigma_{\text{tot}}. \quad (2,26)$$

Подчеркнем еще раз, что в общем случае сечение более просто выражается через T-матрицу, хотя чаще всего оптическую теорему записывают с помощью амплитуды  $f$ .

### §3. Вектор состояния взаимодействующих частиц

При расчете конкретных физических процессов с помощью уравнений (2,15) необходимо иметь выражения для векторов состояний. Мы ограничимся сначала рассмотрением состояний, содержащих лишь одну частицу.

Если отвлечься от таких свойств как заряд, поляризация и т.п., то состояние частицы характеризуется

7) Если массы частиц после реакции другие /а спины те же/, то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{M M_0}{(4\pi E)^2} |T|^2.$$

Здесь  $\mu_0(\mu)$ - импульс до / после/ реакции,

$M_0(M)$ - масса спинорной частицы до /после/ реакции,

$T$  - матрица без нормирующих корней.

заданием одного только импульса  $\vec{k}$ , Тогда вектор состояния записывается в виде

$$\Phi = \int \alpha(\vec{k}) \Phi(\vec{k}) d\vec{k}, \quad (3,1)$$

который совпадает с формулой (1,1), если индекс  $n$  состоит из трех компонент вектора  $\vec{k}$ .

Величина

$$W(\vec{k}) = |c(\vec{k})|^2, \quad (3,2)$$

как указывалось в §1, дает вероятность найти в данном состоянии частицу с импульсом  $\vec{k}$ . Следовательно,  $c(\vec{k})$  является волновой функцией изучаемой частицы.

Условие нормировки волновой функции

$$\int |c(\vec{k})|^2 d\vec{k} = 1 \quad (3,3)$$

совпадает с условием нормировки вектора состояния

$$\Phi^* \Phi = 1, \quad (3,4)$$

если учесть ортогональность состояний с различными импульсами

$$\Phi^*(\vec{k}') \Phi(\vec{k}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3,5)$$

Обычно вектор  $\Phi(\vec{k})$  строят из вакуумного вектора  $\Phi_0$  с помощью операторов рождения частиц  $a^*(\vec{k})$ . Это связано с анализом правил коммутации этих операторов, который можно последовательно провести лишь для не взаимодействующих частиц /или, с помощью теории возмущений, для слабо взаимодействующих частиц/. Мы постараемся обойтись без этого громоздкого аппарата, воспользовавшись основной идеей квантовой теории поля - сопоставлением полей частицам. Нейтральным бесспиновым частицам соответствует вещественное скалярное поле, к рассмотрению которого мы и обращаемся.

# Вещественное скалярное поле

Вещественное скалярное поле  $\varphi(x)$  подчиняется уравнению Клейна-Гордона

$$\partial^2 \varphi / \partial x_\mu^2 - m^2 \varphi = 0. \quad (3,6)$$

Энергия этого поля выражается интегралом

$$E = \int d\vec{x} \left[ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}} \right|^2 + m^2 |\varphi|^2 \right]. \quad (3,7)$$

С помощью (3,6) можно доказать, что имеет место сохранение энергии

$$dE/dt = 0 \quad (3,8)$$

/ниже это будет показано иным образом/.

Чтобы яснее проследить связь свойств волнового поля и сопоставленных ему частиц, перейдем от координатного представления к импульсному

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ik \cdot x} \tilde{\varphi}(k) d^4 k \quad (3,9)$$

$/k \cdot x = \vec{k} \cdot \vec{x} - k_0 t$  /. Уравнение (3,6) тождественно удовлетворяется, если

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta(k^2 + m^2) \varphi(k), \quad (3,10)$$

причем  $\varphi(k) = \varphi(k)$  в силу вещественности  $\varphi(x)$ . Вычислим теперь энергию

$$\begin{aligned} E &= (2\pi)^{-3} \int d\vec{x} \int d^4 p e^{ip \cdot x} \tilde{\varphi}(p) \int d^4 q e^{-iq \cdot x} \tilde{\varphi}(q) (\vec{p} \cdot \vec{q} + m^2) = \\ &= \int d^4 p e^{-ip_0 t} \tilde{\varphi}(p) \int d^4 q e^{iq_0 t} \tilde{\varphi}(q) \delta(\vec{p} - \vec{q}) (\vec{p} \cdot \vec{q} + m^2) = \\ &= \int e^{it(\vec{p} \cdot \vec{q})} (\vec{p} \cdot \vec{q} + m^2) \varphi(p) \varphi(q) \delta(\vec{p} + m^2) \delta(q^2 + m^2) \delta(\vec{p} - \vec{q}) d^4 p d^4 q. \end{aligned} \quad (3,11)$$

С помощью  $\delta(\vec{p}-\vec{q})$  интеграл по  $\vec{q}$  берется тривиально. Затем

$$\delta(q^2 + m^2) = \delta(\vec{p}^2 - q_0^2 + m^2) = \frac{\delta(q_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{2q_0} \quad (3,12)$$

/здесь учтено, что энергия  $q_0$  должна быть положительной/ и становится возможным интегрирование по  $q_0$ . Аналогично преобразуется  $\delta(p^2 + m^2)$  и интеграл по  $p_0$ :

$$\delta(p^2 + m^2) = \delta(\vec{p}^2 - p_0^2 + m^2) = \frac{\delta(p_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{2p_0} \quad (3,13)$$

Мы видим, что

$$p_0 = q_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (3,14)$$

благодаря чему в формуле (3,11) исчезает зависимость от времени — энергия поля оказывается постоянной.

$$E = \int 2p_0^2 [\varphi(\vec{p}, p_0)]^2 \frac{d\vec{p}}{4p_0^2} = \frac{1}{2} \int \varphi^2(\vec{p}, p_0) d\vec{p} \quad (3,15)$$

Сравним это выражение с другим

$$E = \int p_0 |C(\vec{p})|^2 d\vec{p}, \quad (3,16)$$

определяющим энергию состояния  $\Phi$ , содержащего частицу — квант поля  $\varphi(x)$ . Они совпадают друг с другом, если

$$C(\vec{p}) = \frac{\varphi(\vec{p}, \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{\sqrt{2p_0}} \quad (3,17)$$

Таким образом, функции  $C(\vec{p})$ , осуществляющие разложение вектора состояния по  $\Phi(\vec{p})$  — собственным векторам числа частиц и энергии-импульса — выражаются через  $\varphi(p)$  — решения классического уравнения поля.



Отметим, что условие нормировки (3,3), выраженное через  $\varphi$ , имеет ясно релятивистски-инвариантный вид

$$\int d\vec{r} \frac{|\varphi(\vec{r})|^2}{2\rho_0} = \int d^4r \delta(r^2 + m^2) \theta(r_0) |\varphi(\vec{r})|^2 = 1. \quad (3,18)$$

Связь между волновой функцией частицы  $\psi(\vec{r})$  и полевой функцией  $\varphi(\vec{r})$ , выраженная формулой (3,17), имеет место не только для скалярных частиц, но и для всех частиц, имеющих целочисленный спин, так как все эти частицы подчиняются уравнению Клейна-Гордона.

Благодаря этому мы в дальнейшем только выясним различия между отдельными полями, не повторяя вывода (3,17).

### Комплексное скалярное поле

Это поле эквивалентно двум вещественным полям

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \quad (3,19)$$

так что его кванты имеют два вида. Благодаря этому разложение вектора состояния имеет вид

$$\Phi = \sum_{\alpha=1,2} \int d\vec{r} \frac{\varphi_\alpha(\vec{r})}{\sqrt{2\rho_0}} \Phi_\alpha(\vec{r}). \quad (3,20)$$

Эта новая степень свободы может быть понята как наличие у частиц электрического заряда. Действительно, в комплексном поле можно построить вектор тока

$$j_\mu(x) = i \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \varphi \right), \quad (3,21)$$

который в вещественном поле тождественно обращается в нуль. С помощью уравнения Клейна-Гордона легко проверить, что

$$\partial j_\mu / \partial x_\mu = 0, \quad (3,22)$$

т.е. имеет место закон сохранения заряда.

Упомянутые выше два вида квантов комплексного поля отличаются друг от друга знаком заряда. Таким образом, релятивистская теория комплексного поля предсказывает, что наряду с частицей массы  $m$ , заряда  $e$ , должна существовать частица той же массы, но с противоположным зарядом. Это — частный случай общей теоремы о существовании античастиц.

### Вещественное векторное поле $A_\mu(x)$

Это поле имеет четыре компоненты. В зависимости от того, чему равно  $\mu$ , вектор  $A_\mu$  выделяет в пространстве одно из направлений. Следовательно, в поле  $A_\mu$  имеет место анизотропия и кванты этого поля обладают свойством поляризации.

В разложении вектора состояния

$$\Phi = \sum_{\mu} \int d\vec{p} \frac{A_\mu(\vec{p})}{\sqrt{2p_0}} \Phi_\mu(\vec{p}) \quad (3,23)$$

мы, суммируя по  $\mu$ , учитываем все возможные состояния поляризации частиц.

Важнейшим представлением этого класса полей является электромагнитное поле.

### Поле Дирака

Волновое поле Дирака  $\psi(x)$  подчиняется уравнению

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m\psi = 0, \quad (3,24)$$

в котором величины  $\gamma_\mu$  являются матрицами со свойством

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (3,25)$$

Уравнение (3,25) в простейшем случае удовлетворяется 4-рядными квадратными матрицами, что соответствует случаю частиц со спином  $1/2$  /см.напр. [7] /.

Соответственно, полевая функция частицы со спином  $\frac{1}{2}$  представляется 4-рядным столбцом

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (3,26)$$

Часто возникает вопрос о природе этого 4-кратного вырождения. Бедь для описания частицы со спином  $\frac{1}{2}$  достаточно иметь две функции  $\psi_1, \psi_2$ . Какой же смысл имеют две избыточные функции?

Причина заключается в том, что оператор Дирака  $(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)$  коммутирует с оператором спиральности

$$S = i e_{\lambda\mu\nu\rho} \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = i \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\rho \quad (3,27)$$

$/e_{\lambda\mu\nu\rho}$  - полностью антисимметричный тензор 4-го ранга/. Спиральность, как видно из определения, есть проекция спина частицы на ее импульс. У дираковской частицы она может иметь два значения:  $\pm \frac{1}{2}$ . При заданной спиральности проекция спина на ось  $z$  также может иметь два значения, что требует для своего описания двух функций, а всего, следовательно, необходимо задать четыре функции.

Спиральность электрона аналогична поляризации фотона и о ней часто говорят как о поляризации электрона. Однако, в отличие от поляризации фотона, спиральность электрона не является релятивистским инвариантом. Если в одной системе координат спин был направлен по импульсу, то в другой системе, движущейся относительно первой быстрее, чем сама частица / и в том же направлении/, - он будет направлен уже против импульса и спиральность будет противоположной.

Однако, если масса покоя равна нулю, то обгоняющей системы не существует, и для описания состояния

поляризации достаточно двух компонент. Таким свойством обладает нейтрино.

Свяжем теперь функции  $C_s(\vec{p})$  в разложении вектора состояния

$$\Phi = \sum_{s=1,2} \int d\vec{p} C_s(\vec{p}) \Phi_s(\vec{p}) \quad (3,28)$$

/  $s$  - индекс поляризации электрона / с решениями уравнения Дирака, которое мы запишем в импульсном представлении

$$(i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) \psi = 0 \quad (3,29)$$

Матрицы  $\gamma_\mu$  мы будем считать эрмитовыми

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \quad (3,30)$$

Комплексно-сопряженное уравнение

$$\psi^* (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + i\gamma_4 p_4 + m) = 0$$

после умножения справа на  $\gamma_4$  приобретает вид

$$\bar{\psi} (i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) = 0, \quad (3,31)$$

где

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4. \quad (3,31a)$$

Энергия дираковского поля выражается формулой

$$E = \int d\vec{x} (\bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_4} + m \bar{\psi} \psi). \quad (3,32)$$

Запишем решение уравнения Дирака в виде разложения Фурье

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) u(\vec{p}) \delta(p^2 + m^2) d\vec{p} \quad (3,33)$$

и используем его для вычисления энергии:

$$E = (2\pi)^{-3} \int d\vec{q} \int d^4 p e^{-i p \cdot x} \delta(p^2 + m^2) \int d^4 q e^{i q \cdot x} \delta(q^2 + m^2) \bar{u}(p) (-i \gamma p + m) \cdot (i \vec{\gamma} \vec{q} + m) (-i \gamma q + m) u(q) = \int e^{i(p-q) \cdot x} 4m^2 \bar{u}(p) (i \vec{\gamma} \vec{q} + m) u(q) \cdot \delta(p^2 + m^2) \delta(q^2 + m^2) \delta(\vec{p} - \vec{q}) d^4 p d^4 q. \quad (3,34)$$

Как и в теории скалярного поля, интегрируем по  $\vec{q}, q_0, p_0$ . Очевидно,  $p_0 = q_0$  и энергия не зависит от времени. Таким образом,

$$E = \int \frac{m^2}{p^2} \bar{u}(p) (i \vec{\gamma} \vec{p} + m) u(p) d\vec{p}.$$

Из соображений симметрии

$$\bar{u}(p) i \gamma_\mu u(p) = A p_\mu.$$

Домножив на  $p_\mu$ , с помощью уравнения Дирака найдем, что

$$-m \bar{u}(p) u(p) = A p^2 = -A m^2.$$

Наложим на спинор  $u(p)$  условие нормировки

$$\bar{u}(p) u(p) = 1 \quad (3,35)$$

Тогда  $A = 1/m$  и

$$\bar{u}(p) i \gamma_\mu u(p) = \frac{p_\mu}{m}. \quad (3,36)$$

Поэтому

$$\bar{u}(p) (i \vec{\gamma} \vec{p} + m) u(p) = \frac{\vec{p}^2}{m} + m = \frac{E^2}{m}$$

и

$$E = \int m \bar{u}(p) u(p) d\vec{p} = \int E |C(\vec{p})|^2 d\vec{p}.$$

Значит,

$$C_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m}{E}} u_s(\vec{p}). \quad (3,37)$$

/мы ввели здесь явно индекс поляризации  $s$  /.

## Вектор состояния двух частиц

Вектор состояния двух взаимодействующих частиц строится билинейно из волновых функций отдельных частиц

$$\Phi = \sum_{m_1, n_1} \int d\vec{p}_1 d\vec{q}_1 C_{m_1}(\vec{p}_1) C_{n_1}(\vec{q}_1) \Phi_{m_1 n_1}(\vec{p}_1, \vec{q}_1). \quad (3,38)$$

Здесь  $C_{m_1}(\vec{p}_1)$  — рассмотренная выше волновая функция одной из частиц, связанная с полевой функцией соотношением (3,17) или (3,37) — в зависимости от того, целый или полуцелый у нее спин.

Предположим теперь, что и в начальном, и в конечном состоянии содержится по две частицы. Тогда оба вектора состояния представимы в виде (3,38) и матрица рассеяния

$$S = (\Phi_{out}, \Phi_{in}) \quad (3,39)$$

/ср. с формулой (1,2) / может быть записана в виде

$$S = \sum_{\substack{m_1, n_1 \\ m_2, n_2}} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 C_{n_1}(\vec{p}_1) C_{n_2}^*(\vec{p}_2) C_{m_1}(\vec{q}_1) C_{m_2}^*(\vec{q}_2) \cdot S_{m_1, n_1}^{m_2, n_2}(\vec{p}_1, \vec{q}_2; \vec{p}_2, \vec{q}_1). \quad (3,40)$$

Здесь  $S_{m_1, n_1}^{m_2, n_2}$  представляет собой матричный элемент рассеяния двух частиц с импульсами  $\vec{p}_1, \vec{q}_1$  и прочими квантовыми числами  $m_1, n_1$  в состояние, характеризуемое импульсами  $\vec{p}_2, \vec{q}_2$  и числами  $m_2, n_2$ . К таким матричным элементам мы будем в дальнейшем применять требования ковариантности, унитарности и аналитичности.

Формальный аппарат теории может считаться построенным. Детальный разбор введенных здесь понятий удобнее проводить отдельно в каждом конкретном случае.

## II глава. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Явления, которые мы связываем с электромагнитными взаимодействиями, обусловлены тем, что в них так или иначе участвуют фотоны — кванты электромагнитного поля. Исторически начало квантовой теории связано с тем, что М.Планк установил необходимость рассматривать электромагнитное излучение как совокупность квантов /1900 г./. Впоследствии А.Эйнштейн показал, что представление о фотонах позволяет понять основные законы фотоэффекта /1905 г./, а еще позже А.Комптон на этой же основе объяснил наблюдаемый им эффект /1923 г./.

Последовательная трактовка электромагнитного поля как совокупности фотонов /квантовая электродинамика/ построена В.Паули и В.Гейзенбергом в 1927 г. На ее основе в 1930 г. И.Е.Тамм дал количественную теорию эффекта Комптона и образования пар. Позже квантовая электродинамика успешно применялась к большому числу явлений. В настоящее время она является наиболее разработанной частью квантовой теории полей<sup>8)</sup>.

С точки зрения квантовой теории поля, фотон — это нейтральная частица со спином 1. Состояние фотона описывается его волновой функцией  $A_\mu(x)$ , которая подчиняется уравнениям Максвелла. Если импульс фотона равен  $q$ , то

$$A_\mu(x) = e_\mu e^{-iq \cdot x} \quad (4,1)$$

Здесь  $e_\mu$  — единичный вектор поляризации

$$e^2 = 1. \quad (4,2)$$

На потенциал  $A_\mu$  налагается условие Лоренца  $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$ , которое сводится к

$$q \cdot e = 0. \quad (4,3)$$

---

<sup>8)</sup> Подробное изложение квантовой электродинамики можно найти в книгах [8,9] и работах [10,11].

Вместе с равенством  $q^2 = 0$ , выражающим отсутствие массы покоя у фотона, эти уравнения составляют основу кинематики фотонов.

В этой главе мы рассмотрим рассеяние фотонов электронами и электронов - нуклонами и мезонами. Это наиболее типичные процессы, изучаемые в квантовой электродинамике. Будут также кратко рассмотрены тормозное излучение и образование пар.

#### §4. Эффект Комптона

Наблюдая в 1923 г. рассеяние жестких рентгеновских лучей веществом, А.Комптон обнаружил, что рассеянные лучи имеют большую длину волны, чем падающие. Этот сдвиг был объяснен им и П.Дебаем в предположении, что рассеивающим объектом являются электроны.

Рассмотрим в связи с этим рассеяние фотона на электроне. Процесс схематически изображается рис.3

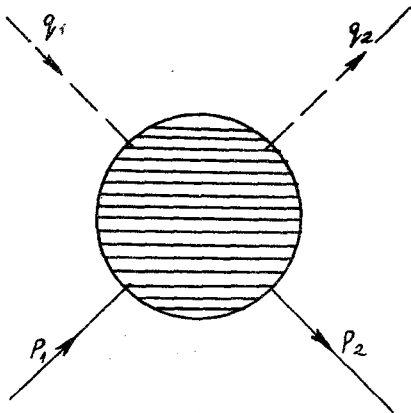


Рис.3



на котором использованы следующие обозначения:  $q_1$  и  $q_2$  - импульсы фотона до и после рассеяния,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - начальный и конечный импульсы электрона. Заштрихованный блок изображает все процессы, в результате которых изменяются импульсы, то есть происходит рассеяние. Матричный элемент

$$S_{fi} = \langle \mu_2 q_2 | S | \mu_1 q_1 \rangle \quad (4,4)$$

может быть, согласно гл. I, записан в виде

$$S_{fi} = \sum_{\mu, \nu} C_{\nu}^*(q_2) C_{\mu}(q_1) \langle \mu_2 | S_{\mu\nu}(q_1, q_2) | \mu_1 \rangle. \quad (4,5)$$

Здесь оставлена только сумма по поляризациям фотона:  $\mu$  и  $\nu$ , а из суммы по импульсам выделен один член, соответствующий заданным  $q_1$  и  $q_2$ . Коэффициенты разложения связаны с волновыми функциями фотона уравнениями (3,17)

$$C_{\mu}(q_1) = \frac{e_{1\mu}}{\sqrt{2}\omega_1}, \quad C_{\nu}^*(q_2) = \frac{e_{2\nu}}{\sqrt{2}\omega_2} \quad (4,6)$$

$\omega_1$  и  $\omega_2$  - энергии фотона до и после рассеяния/. Введем амплитуду рассеяния  $M$  по определению

$$\langle \mu_2 | S_{\mu\nu}(q_1, q_2) | \mu_1 \rangle = i(2\pi)^4 \delta(\mu_1 + q_1 - \mu_2 - q_2) M. \quad (4,7)$$

Мы опустили здесь все параметры, входящие в  $M$ , в связи с чем следует подчеркнуть, что по индексам  $\mu, \nu$  амплитуда должна быть тензором второго ранга.

Суммирование по  $\mu, \nu$  в формуле (4,5) производится независимо. Поэтому, если учесть, что

$$C_{\mu}(q_1) \approx C_{\nu}^*(q_2)$$

при замене

$$\mu \rightleftharpoons \nu, \quad q_1 \rightleftharpoons -q_2, \quad (4,8)$$

то станет ясно, что  $S_{\mu\nu}(q, q')$  должна быть инвариантна относительно этого преобразования. Это — так называемая перекрестная инвариантность, которая является обобщением принципа симметрии волновых функций для частиц, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна.

Для вычисления амплитуды  $M$  воспользуемся тем, что она — аналитическая функция своих аргументов. В качестве таковых следует брать релятивистски-инвариантные величины. Энергия релятивистски инвариантно характеризуется величиной

$$s = -(\mu_1 + q_1)^2. \quad (4,9)$$

Действительно,  $s = W^2$ , где  $W$  — полная энергия в системе центра масс /с.ц.м./ или  $s = m^2 + 2m\omega_1$ , где  $\omega_1$  — энергия фотона в лабораторной системе /л.с./, а  $m$  — масса электрона. Кстати, эти формулы связывают энергетические характеристики в обеих системах. Итак,

$$M(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } M(s) ds}{s - s_0}. \quad (4,10)$$

Мнимая часть амплитуды дается унитарностью

$$\text{Im } M = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \langle p_2 | n \rangle^* \langle n | p_1 \rangle \delta^4(p_1 + q_1 - p_2). \quad (4,11)$$

При суммировании по  $n$  необходимо принимать во внимание только те состояния, которые подчиняются закону сохранения числа частиц, т.е. если в начальном состоянии был один электрон, то в промежуточном состоянии может содержаться лишь один электрон плюс любое число фотонов или электронно-позитронных пар. Простейшим из этих состояний является состояние, содержащее один электрон. Учтем только его при вычислении мнимой части

$$\text{Im } M_1 = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \langle p_2 | p_1 s \rangle^* \langle p_1 s | p_1 \rangle \delta^4(p_1 + q_1 - p_2) \quad (4,12)$$

/индекс  $i$  обозначает, что учитывается только одно-частичное промежуточное состояние,  $\sum_f$  - сумма по поляризациям электрона в промежуточном состоянии/.

Учитывая, что  $M$  - тензор второго ранга, имеем

$$\begin{aligned} \text{Im } M_1 = & \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_s \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \left\{ \delta(p_1 + q_1 - p_n) i \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u_s(p_n) i \bar{u}_s(p_n) \gamma_\mu u(p_1) \frac{m}{E_n} - \right. \\ & \left. - \delta(p_1 - q_2 - p_n) i \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u_s(p_n) i \bar{u}_s(p_n) \gamma_\nu u(p_1) \frac{m}{E_n} \right\} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Здесь введено второе слагаемое, возникающее в сумме при независимом суммировании по  $\mu, \nu$ . Знак минус перед ним и изменение в аргументе  $\delta$ -функции необходимы для обеспечения перекрестной инвариантности, отмеченной выше.

Множитель  $e$  введен по определению

$$\langle p_n s | p_1 \mu \rangle = i \bar{u}_s(p_n) \gamma_\mu u(p_1) \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_n}} \quad (4.14)$$

и является, вообще говоря, инвариантной функцией импульсов

$$e = e((p_1 - p_n)^2) \quad (4.15)$$

Благодаря наличию  $\delta$ -функции

$$e = e(q_1^2) = e(0), \quad (4.16)$$

то есть эта функция сводится к постоянной. Нетрудно проверить, что эта постоянная вещественна, так как только тогда матричный элемент (4.14) эрмитов. При нашем выборе единиц  $e$  - безразмерная величина. В дальнейшем будет видно, как она связана с зарядом электрона.

Остальные преобразования - дело техники. Сумма по поляризациям

$$\sum_s u_s^\alpha(p_n) \bar{u}_s^\beta(p_n) = \frac{(i \not{p}_n + m) \alpha \beta}{2m} \quad (4.17)$$

Действительно, умножая слева на оператор Дирака  $(i\gamma \cdot p_n + m)$ , получаем нуль: слева — потому, что  $u_s$  удовлетворяет уравнению Дирака, а справа — тождественно. То же самое происходит и при умножении на этот оператор справа. Полагая  $\alpha = \beta$  и суммируя по  $\alpha$  от 1 до 4, находим

$$\sum_s \bar{u}_s(p_n) u_s(p_n) = 2$$

в силу нормировки спинора  $u_s$ . В правой части равенства (4,17) войдет шпур — диагональная сумма матричных элементов

$$S_p 1 = 4, \quad S_p \gamma_\mu = (\gamma_\mu)_{\alpha\alpha} = 0 \quad (4,18)$$

$S_p \gamma_\mu$  равен нулю, так как он с одной стороны является числом, не зависящим от выбора системы отсчета, а с другой стороны — вектором. С помощью этих равенств убеждаемся в правильности (4,17).

Итак,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = -\pi e^2 \int d\vec{p}_n \frac{m}{E_n} \left\{ \delta(p_1 + q_1 - p_n) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu \frac{-i\gamma \cdot p_n + m}{2m} \gamma_\mu u(p_1) - \right. \\ \left. - \delta(p_1 - q_2 - p_n) \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \frac{-i\gamma \cdot p_n + m}{2m} \gamma_\nu u(p_1) \right\} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}}. \quad (4,19) \end{aligned}$$

Интеграл по импульсам вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\vec{p}_n}{2E_n} \delta^4(p_1 + q_1 - p_n) = \int d^4p \delta(p^2 + m^2) \theta(p_0) \delta^4(p_1 + q_1 - p) = \\ = \delta(p_1 + q_1)^2 + m^2 \theta(p_{10} + q_{10}). \quad (4,20) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = \pi e^2 \bar{u}(p_2) \left\{ \delta(s - m^2) \gamma_\nu [i\gamma \cdot (p_1 + q_1) - m] \gamma_\mu - \right. \\ \left. - \delta(u - m^2) \gamma_\mu [i\gamma \cdot (p_1 - q_2) - m] \gamma_\nu \right\} u(p_1) \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}}. \quad (4,21) \end{aligned}$$

Здесь наряду с инвариантом  $S$  /см. (4,9) / введен инвариант

$$u = -(\mu_1 - q_2)^2. \quad (4,22)$$

Существует и третий инвариант

$$t = -(\mu_1 - \mu_2)^2, \quad (4,23)$$

линейно зависящий от  $S$  и  $u$  :

$$S + t + u = 2m^2 \quad (4,24)$$

/это равенство вытекает из сохранения энергии-импульса/. При интегрировании по  $S$  инвариант  $t$  должен быть фиксирован, так как мы рассматриваем  $M(s)$  как аналитическую функцию одной переменной. Инвариант  $t$  совпадает с передачей импульса.

Подставив (4,21) в дисперсионное соотношение (4,10) легко интегрируем благодаря наличию  $\delta$ -функций:

$$M = e^2 \bar{u}_2 \left\{ \gamma_\nu \frac{i\gamma \cdot (\mu_1 + q_1) - m}{(\mu_1 + q_1)^2 + m^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{i\gamma \cdot (\mu_1 - q_2) - m}{(\mu_1 - q_2)^2 + m^2} \gamma_\nu \right\} u_1 \sqrt{\frac{m^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}}. \quad (4,25)$$

Весь матричный элемент /см. (1,5-7) / имеет вид

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta(\mu_1 + q_1 - \mu_2 - q_2) \sqrt{\frac{m^2}{4\omega_1 \omega_2 \epsilon_1 \epsilon_2}} e^2 \bar{u}_2 \left\{ \hat{e}_2 \frac{i(\mu_1 + q_1) - m}{(\mu_1 + q_1)^2 + m^2} \hat{e}_1 + \hat{e}_1 \frac{i(\mu_1 - q_2) - m}{(\mu_1 - q_2)^2 + m^2} \hat{e}_2 \right\} u_1. \quad (4,26)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\hat{a} = \gamma_\mu a_\mu \quad (4,27)$$

и явно указали в спинорах  $u_s(p)$  начальную и конечную поляризации электрона. Матричный элемент, полученный нами, в точности воспроизводит первое приближение теории возмущений [8] .

Казалось бы, этот факт является тривиальным отражением результата Боголюбова и Ширкова о том, что теория возмущений содержится в наших основных постулатах /инвариантность, унитарность, причинность/. Это, однако, не так, потому что в их работе, кроме этого, было необходимо задать лагранжиан, а у нас это излишне. Именно поэтому наш результат нетривиален. В первом приближении достаточно знать не лагранжиан, а лишь одну константу - заряд. Во втором приближении необходимо задать уже несколько функций. Введение лагранжиана ставит эти и все другие неизвестные величины в функциональную зависимость от вида лагранжиана. В нашем случае такой явной зависимости нет, но требование унитарности в известной мере коррелирует большинство неизвестных функций между собой. Достаточно ли одного этого требования для их совместного определения - неизвестно.

Существенным отличием от теории возмущений является также и то, что в матричный элемент входят уже перенормированные заряд и масса электрона.

Вычислим теперь сечение рассеяния с помощью матричного элемента (4,26)

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{e^4 m^2}{4\omega_1 \omega_2 \epsilon_1 \epsilon_2} |\bar{u}_2 Q u_1|^2 \frac{d\vec{p}_2 d\vec{q}_2}{f(2\pi)^6} \quad (4,28)$$

$$Q = \hat{\epsilon}_2 \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{q}_1) - m}{(p_1 + q_1)^2 + m^2} \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_1 \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{q}_2) - m}{(p_1 - q_2)^2 + m^2} \hat{\epsilon}_2 \quad (4,29)$$

Множитель  $\delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)$ , входящий в сечение, называют статистическим весом. Его удобно преобразовать к 4-мерному виду

$$d\vec{p}_2 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) = 2 \epsilon_2 d\vec{p}_2 \delta(p_2^2 + m^2) \theta(p_2 0) \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2),$$

после чего интеграл по  $p_2$  легко берется, так что

$$\rho_F = 2\varepsilon_2 \theta(\varepsilon_2) \delta(p_1 + q_1 - q_2)^2 + m^2) d\vec{q}_2 \quad (4,30)$$

Благодаря наличию  $\delta$ -функции одно интегрирование можно провести тривиально /это мы сделаем позже/. Следовательно, для характеристики конечного состояния достаточно задать два параметра. При нашем выборе переменных ими могут быть два угла, характеризующие направление движения рассеянного фотона.

$\delta$ -функция в (4,30) связывает параметры рассеянного фотона с начальными данными. Имеем

$$(p_1 + q_1 - q_2)^2 + m^2 = p_1^2 + q_1^2 + q_2^2 + m^2 + 2p_1(q_1 - q_2) - 2q_1 q_2 = 0,$$

т.е.

$$p_1(q_1 - q_2) - q_1 q_2 = 0 \quad (4,31)$$

Это инвариантное выражение в л.с. сводится к

$$-m(\omega_1 - \omega_2) - \vec{q}_1 \vec{q}_2 + \omega_1 \omega_2 = -m(\omega_1 - \omega_2) + \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta) = 0,$$

т.е.

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{\omega_1}{m} (1 - \cos \theta)} \quad (4,32)$$

В с.ц.м. это же равенство (4,31) устанавливает доплеровское изменение частоты фотона  $\omega_2 = \frac{m}{\hbar} \omega_1$ . Связи между частотой и углом здесь нет.

Формула (4,32) выведена А.Комптоном и выражает частоту рассеянного фотона через угол рассеяния. Конечно,  $\omega_2 < \omega_1$ , так как часть энергии расходуется на движение электрона отдачи. Впрочем, при  $\omega_1 \ll m$  эта поправка крайне мала и имеет место обычное рассеяние без изменения частоты.

Исключим  $\delta$ -функцию, проинтегрировав (4,30) по  $\omega_2 = |\vec{q}_2|$ :

$$d\vec{q}_2 \delta((p_1, q_1 - q_2)^2 + m^2) = \omega_2^2 d\omega_2 d\Omega \delta(-2m(\omega_1 - \omega_2) + 2\omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta)) = \\ = \omega_2^2 d\Omega \left/ \frac{\partial}{\partial \omega_2} (-2m\omega_1 + 2m\omega_2 + 2\omega_1 \omega_2 - 2\omega_1 \omega_2 \cos \theta) \right/ = \frac{\omega_2^3}{2m\omega_1} d\Omega. \quad (4,33)$$

Для вычисления сечения необходимо задать поляризации электронов до и после рассеяния. Подробности и результаты вычислений можно найти в [8]. Здесь мы получим сечение рассеяния на неполяризованных электронах /формула Клейна-Нишины [12] -Тамма [13]/.

При отсутствии поляризации электронов в начальном состоянии необходимо взять сумму выражений вида (4,28) с различными  $s_1$ , умножив каждое на его вероятность. Отсутствие поляризации означает равновероятность различных  $s_1$ , так что следует взять  $\frac{1}{2} \sum_{s_1}$ . Кроме того, мы не будем рассматривать поляризацию электронов отдачи, т.е. просуммируем по  $s_2$ . Получающееся выражение

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \bar{u}_{s_2}(p_2) Q u_{s_1}(p_1) \bar{u}_{s_1}(p_1) \gamma_4 Q^+ \gamma_4 u_{s_2}(p_2)$$

/  $\gamma_4$  появляется вследствие того, что  $u^+ \bar{u} \gamma_4$  преобразуется с помощью уравнения (4,17)

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \bar{u}_{s_2}^\alpha Q_{\alpha\beta} u_{s_1}^\beta \bar{u}_{s_1}^\rho Q_{\rho\sigma} u_{s_2}^\sigma = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \left( \frac{-i\hat{p}_1 + m}{2m} \right)_{\beta\rho} Q_{\rho\sigma} \left( \frac{-i\hat{p}_2 + m}{2m} \right)_{\sigma\alpha} = \\ = \frac{1}{8m^2} S_\mu Q(-i\hat{p}_1 + m) \bar{Q}(-i\hat{p}_2 + m). \quad (4,34)$$

$$\bar{Q} = \gamma_4 Q^+ \gamma_4.$$



Таким образом,

$$d\sigma/d\Omega = r_0^2 (\omega_2/\omega_1)^2 \frac{1}{8} S_\mu Q(-i\hat{r}_1 + m) \bar{Q}(-i\hat{r}_2 + m), \quad (4,35)$$

где

$$r_0 = e^2/4\pi m \quad (4,35a)$$

- классический радиус электрона.

Заметим, что множитель  $(\omega_2/\omega_1)^2$ , существенный при больших энергиях, имеет чисто кинематическое происхождение и сохраняется в любой теории, тогда как шпур зависит от динамических свойств электрона и фотона /например, от их спинов/.

Учитывая, что  $Q$  однородно содержит  $e_1$  и  $e_2$  можно утверждать, что

$$J = S_\mu Q(-i\hat{r}_1 + m) \bar{Q}(-i\hat{r}_2 + m) = A(e_1, e_2)^2 + B(e_1, e_2)(e_1 q_2)(e_2 q_1) + E q_1^2 e_2^2 + C(e_1 q_1)^2 (e_2 q_1)^2 + D[(e_1 q_2)^2 + (e_2 q_1)^2]. \quad (4,36)$$

Этот вид шпура фактически не зависит от каких-либо предположений, кроме перекрестной симметрии.

Найти коэффициенты  $A, B, \dots, E$  проще всего, написав шпур в явном виде

$$J = S_\mu \hat{r}_1 \hat{e}_1 \hat{u}_1 \hat{e}_2 \hat{r}_2 \hat{u}_2 \hat{e}_1 + 2S_\mu \hat{r}_1 \hat{e}_2 \hat{u}_2 \hat{e}_1 \hat{r}_2 \hat{e}_2 \hat{u}_1 \hat{e}_1 + S_\mu \hat{r}_1 \hat{e}_2 \hat{u}_2 \hat{e}_1 \hat{r}_2 \hat{e}_1 \hat{u}_2 \hat{e}_2 - 2m^2 S_\mu \hat{e}_1 \hat{u}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{u}_2 \hat{e}_2 \quad (4,37)$$

Теперь с помощью рекуррентной формулы

$$S_\mu \hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_n = \sum_{k=2}^n (A_1 A_k) (-1)^k S_\mu \hat{A}_2 \hat{A}_3 \dots \hat{A}_{k-1} \hat{A}_{k+1} \dots \hat{A}_n \quad (4,38)$$

можно выделять из (4,37) члены, имеющие необходимую структуру. Например,

$$A = 4 S_p \hat{r}_1 \hat{u}_1 \hat{r}_2 \hat{u}_2 - 4 m^2 S_p \hat{u}_1 \hat{u}_2 = 8, \quad (4,39a)$$

$$E = S_p \hat{r}_1 \hat{u}_1 \hat{r}_2 \hat{u}_2 - 2 S_p \hat{r}_1 \hat{u}_1 \hat{r}_2 \hat{u}_2 + S_p \hat{r}_1 \hat{u}_2 \hat{r}_2 \hat{u}_2 + \\ + 2 m^2 S_p \hat{u}_1 \hat{u}_2 = 2(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2. \quad (4,39b)$$

Аналогичным образом можно убедиться, что остальные коэффициенты тождественно обращаются в нули. Поэтому

$$T = 8(e_1 e_2)^2 + 2(\omega_1 - \omega_2)^2 / \omega_1 \omega_2. \quad (4,40)$$

При  $\omega_1 \ll m$ , когда  $\omega_2 \approx \omega_1$ , мы получаем в точности результат классической теории Томсона

$$\sigma_{\text{клас}}(\theta) = r_0^2 (\vec{e}_1 \vec{e}_2)^2. \quad (4,41)$$

Из нее и формулы (4,35a) становится ясным смысл константы  $e$ : это заряд электрона, умноженный на  $\sqrt{4\pi}$ .

Как видно из (4,41), когерентное рассеяние в нерелятивистском пределе не зависит от энергии фотона и убывает при увеличении массы рассеивающей частицы. Эти свойства комптоновского рассеяния не зависят от конкретных деталей теории и являются совершенно общими /см. [15]/.

Второе слагаемое в (4,40) обусловлено отдачей электрона и описывает некогерентную часть сечения. Полное выражение для сечения имеет вид

$$\sigma(\theta) = \frac{r_0^2}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4(\vec{e}_1 \vec{e}_2)^2 \right), \quad (4,45)$$

указанный Клейном, Нишиной и Таммом. Чтобы пользоваться этой формулой, необходимо задать угол рассеяния и поляризацию рассеянного фотона.

Направления поляризации в рассеянном пучке выбираются следующим образом

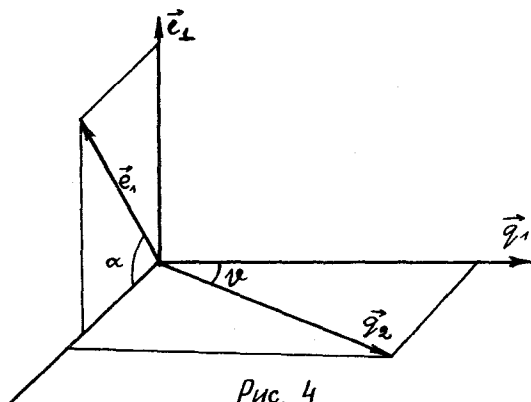


Рис. 4

$$\vec{e}_\perp = \frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1}{|\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1|}, \quad \vec{e}_\parallel = \frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{e}_1}{|\vec{q}_2|}. \quad (4, 46)$$

Вектор  $\vec{e}_\perp$  перпендикулярен плоскости рассеяния, а  $\vec{e}_\parallel$  лежит в ней. При таком выборе

$$(\vec{e}_\perp, \vec{e}_\perp)^2 = \sin^2 \alpha; \quad (\vec{e}_\perp, \vec{e}_\parallel)^2 = \cos^2 \theta \cos^2 \alpha \quad (4, 47)$$

и сечения рассеяния под углом  $\theta$  в случае двух различных поляризаций становятся равными:

$$\sigma_\perp(\theta) = \frac{r_0^2}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4 \sin^2 \alpha \right). \quad (4, 48a)$$

$$\sigma_\parallel(\theta) = \frac{r_0^2}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha \right). \quad (4, 48b)$$

Полное сечение /сумма по поляризациям/

$$\sigma(\theta) = \frac{r_0^2}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha \right) \quad (4, 49)$$

проявляет азимутальную анизотропию: при постоянном угле  $\theta$  сечение зависит от угла  $\alpha$  между плоскостью рассеяния и начальной плоскостью поляризации. В частности, рассеяние "вверх" / $\alpha = 0$ / менее вероятно, чем

рассеяние "вправо" ( $\alpha = \pi/2$ ) относительно плоскости поляризации. Однако, имеет место симметрия рассеяния "вправо-влево" ( $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ ) и "вверх-вниз" ( $\alpha = 0, \pi$ ).

Если падающий фотон не поляризован, то следует усреднить по углу  $\alpha$  :

$$\overline{\sigma}_\perp(\theta) = \frac{\kappa_0^2}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right). \quad (4,50a)$$

$$\overline{\sigma}_\parallel(\theta) = \frac{\kappa_0^2}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 \sin^2 \theta \right). \quad (4,50b)$$

Из этих формул видно, что рассеянный фотон оказывается частично поляризованным перпендикулярно плоскости рассеяния /так как  $\overline{\sigma}_\perp > \overline{\sigma}_\parallel$ /. Степень поляризации равна

$$P(\theta) = \frac{\sigma_\perp - \sigma_\parallel}{\sigma_\perp + \sigma_\parallel} = \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2 \theta} \quad (4,51)$$

при полном сечении

$$\sigma(\theta) = \sigma_\perp + \sigma_\parallel = \frac{\kappa_0^2}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2 \theta \right). \quad (4,52)$$

Зависимость этих величин от угла рассеяния оказывается довольно сложной, и мы изучим ее для предельных случаев.

В нерелятивистском случае

$$\omega_1 \ll m, \quad \omega_2 \approx \omega_1,$$

$$P_{\text{нерел}} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad \sigma_{\text{нерел}}(\theta) = \frac{1}{2} \kappa_0^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (4,53)$$

имеет место симметрия в рассеянии "вперед-назад" ( $\theta = 0, \pi$ ), сопровождающаяся анизотропией вида  $1 + \cos^2 \theta$ . Поляризация достигает максимума при  $\theta = \pi/2$ , где она является полной, и отсутствует при  $\theta = 0$ . Эти зависимости изображены на рис. 5. Они совпадают с данными классической теории рассеяния.

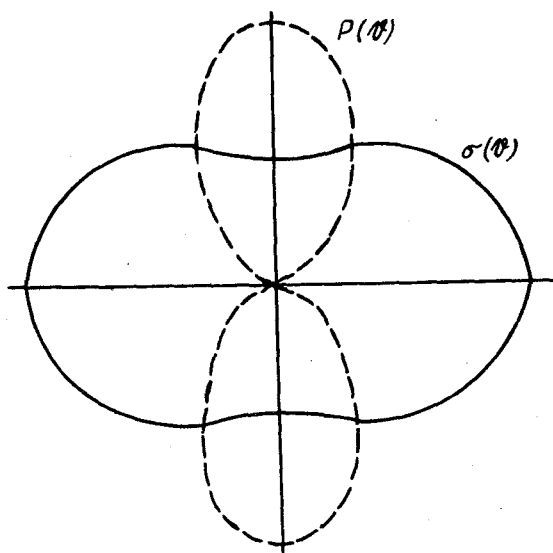


Рис. 5

В области больших энергий ( $\omega_1 \gg m$ ) следует различать две области углов:

а/ малые углы, где  $\omega_1(1 - \cos \theta)/m \ll 1$  и сохраняются результаты нерелятивистской теории, и

б/ большие углы, где это неравенство обращается в

$$\omega_2 = \frac{m}{1 - \cos \theta} \ll \omega_1 \quad (4,54)$$

Область малых углов, а с нею и область применимости классической теории, сужается с ростом энергии.

В области больших углов

$$P_{\text{рел}} = \frac{2m}{\omega_1} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \sigma_{\text{рел}}(\theta) = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{m}{\omega_1} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta} \quad (4,55)$$

поляризации и сечение быстро уменьшаются с энергией. Для сечения характера резкая анизотропия - основная часть рассеяния сосредоточена в угле  $\theta_0 \sim \sqrt{2m/\omega_1}$ . На рис. 6 изображен общий вид угловых зависимостей в этом

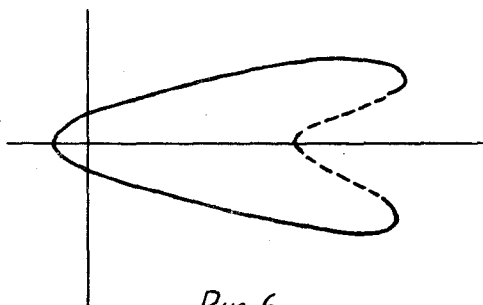


Рис. 6

случае; пунктиром отмечен переход в область малых углов.

Рассмотрим распределение рассеянных фотонов по энергиям, для чего в формуле (4,52) выразим  $\cos \theta$  через  $\omega_2$ :

$$\cos \theta = 1 + \frac{m}{\omega_1} - \frac{m}{\omega_2}; \quad d\Omega = 2\pi m \frac{d\omega_2}{\omega_2^2}. \quad (4,56)$$

Поскольку в угловом распределении имелся максимум, то естественно, что аналогичный максимум имеется и в энергетическом распределении /благодаря жесткой связи энергии и угла/. Это распределение изображено на рис. 7

$$\frac{d\sigma}{d\omega_2} = \pi r_0^2 m \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{m^2}{\omega_1^2} + \frac{m^2}{\omega_2^2} + \frac{2m}{\omega_1} - \frac{2m}{\omega_2} - \frac{2m^2}{\omega_1 \omega_2} \right). \quad (4,57)$$

Заменяя  $\omega_2 = \omega_1 + m - \epsilon$ , можем получить энергетическое распределение электронов отдачи. Оно изображается тем же графиком /рис. 7/, если изменить направление оси абсцисс на противоположное и сдвинуть начало отсчета энергии на  $(\omega_1 + m)$ .

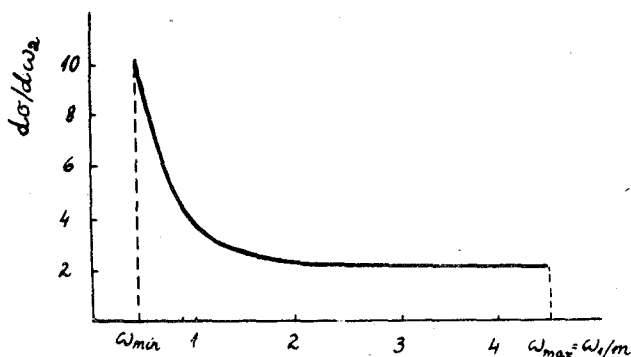


Рис. 7

Интегрируя по  $\omega_2$  в пределах от  $\omega_{min} = \omega_0 \sqrt{1 + 2\omega_0/m}$  до  $\omega_{max} = \omega_1$ , получаем полное сечение рассеяния неполяризованных фотонов в виде

$$\sigma = \pi r_0^2 \left[ 2 \frac{1+\gamma}{(1+2\gamma)^2} + \frac{4}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2}{\gamma^3} \ln(1+2\gamma) \right]; \quad \gamma = \frac{\omega_1}{m}. \quad (4,58)$$

В нерелятивистском случае  $\gamma \ll 1$  / получаем томсоновский результат

$$\sigma_{\text{керн}} = \frac{8}{3} \pi r_0^2. \quad (4,59)$$

В крайне релятивистском случае ( $\gamma \gg 1$ )

$$\sigma_{\text{у-рел}} = \pi r_0^2 \left( \frac{\ln 2\gamma}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma} \right). \quad (4,60)$$

Главный член этого разложения  $\ln \gamma / \gamma$  возникает от учета отдачи, в то время как статическая часть при больших энергиях имеет вид  $\sim 1/\gamma$ .

Падение сечения с энергией физически объясняется тем, что благодаря дальнедействующему характеру кулоновского поля получается гасящая интерференция фотонов, рассеянных на далеких расстояниях от электрона. Если бы электрон имел резкую границу, то она бы хорошо

отражала и спада  $\sigma(E)$  не было бы. Так ведет себя рассеяние на короткодействующем потенциале.

Померанчук показал [16], что зависимость  $\sim \ln E/E$  действительно обусловлена одним бесконечным радиусом действия электромагнитного поля /это значит, что на любом конечном расстоянии поле заряда отлично от нуля/. В отличие от этого при рассеянии на короткодействующем потенциале асимптотическое поведение сечения имеет вид

$$\sigma(E) \approx A + \frac{B}{E} + \dots \quad (4,61)$$

## § 5. Рассеяние электронов на протонах

Рассмотрим теперь взаимодействие двух частиц через электромагнитное поле. Такого рода явления изучались Томсоном /рассеяние электронов на атомах/, Э.Резенфордом /рассеяние  $\alpha$ -частиц на ядрах/, Р.Хофстадтером /рассеяние электронов на протонах/ [17].

Изучение этих явлений позволило уяснить картину строения атома /Резерфорд/ и получить первые сведения о внутренней электромагнитной структуре протона /Хофстадтер/.

Для вычисления матричного элемента взаимодействия двух частиц

$$S = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) M \quad (5,1)$$

применим условие аналитичности по передаче импульса

$$M(s_0, t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } M(s_0, t) dt}{t - t_0} \quad (5,2)$$

Если изобразить процесс рассеяния схематически, то станет ясно, что рассмотрению  $t$  как аналитического аргумента соответствует изучение процесса

$$N + \bar{N} \rightarrow e + \bar{e} \quad (5,3)$$



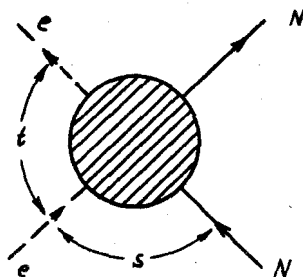


Рис. 8

Этому отвечает следующая область изменения аргументов

$$t \geq (2M)^2, \quad 0 \geq s \geq -(t - 4M^2). \quad (5,4)$$

Вычислив матричный элемент в этой области, мы продолжим его аналитически в область реакции

$$e + N \rightarrow e + N, \quad (5,5)$$

в которой

$$s \geq (M+m)^2, \quad 0 \geq t \geq -\frac{[s - (M+m)^2][s - (M-m)^2]}{s}. \quad (5,6)$$

В плоскости переменных  $(s, t)$  неравенствам (5,4) и (5,6) отвечают две непересекающиеся области, изображенные на рис.9. Там же указана область изменения аргументов  $(s, t)$  в реакции  $e + N \rightarrow e + N$  9).

На этом рисунке контур интегрирования в дисперсионном соотношении (4,10) изображается горизонтальной прямой, а контур, используемый в (5,2), вертикальной прямой. Очевидно, можно написать соотношение, в котором  $s, t$  изменяются вдоль любой кривой в плоскости  $(s, t)$ .

9) Конечно, возможность аналитического продолжения из области реакции  $N\bar{N}$  в область реакции  $eN$  остается недоказанной.

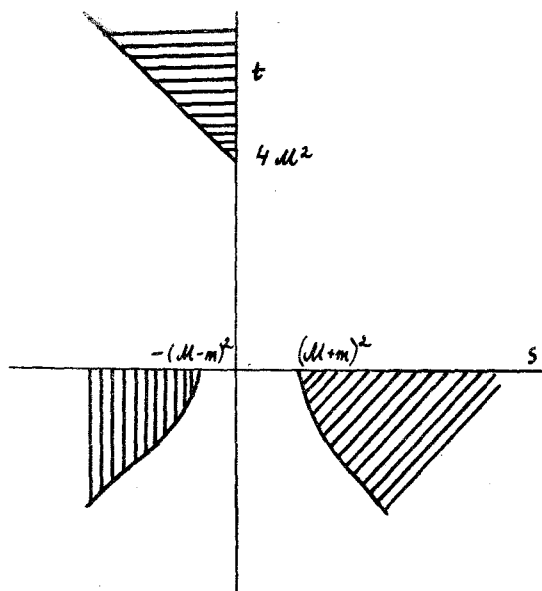


Рис. 9

После этих замечаний мы можем перейти к вычислению мнимой части.

$$\text{Im } M = \frac{(g\pi)^4}{2} \sum_n \delta(p_1 + \bar{p}_2 - p_n) \langle \bar{q}, q_2/n \rangle^+ \langle n/p_1 \bar{p}_2 \rangle. \quad (5,7)$$

Здесь введены импульсы  $\bar{p}_2$  и  $\bar{q}_2$  /равные соответственно  $-p_2$  и  $-q_2$  /античастиц, участвующих в реакции (5,3) .

Какие промежуточные состояния вносят вклад в сумму по  $n$  ? Эти состояния должны иметь те же квантовые числа, что и начальное состояние - в этом состоит принцип отбора. Поскольку нуклон и антинуклон имеют полуцелый спин, то момент импульса в состоянии  $|n\rangle$  должен быть целым. Если в состоянии  $|n\rangle$  содержится лишь одна частица, то она должна быть частицей с целочисленным спином. К такому же выводу можно прийти, рассматривая конечное состояние.

Совершенно ясно также, что частица, содержащаяся в промежуточном состоянии, должна быть связана каким-то взаимодействием как с нуклонами, так и с электронами. Единственной частицей такого рода является фотон. Другой такой частицей мог бы быть гравитон, но силы, создаваемые им, крайне малы.

Вклад более сложных состояний /например, 2-фотонных и т.п./ мы здесь рассматривать не будем. Тогда

$$T_{M M} = \pi \sum_{\kappa} \int d\vec{\kappa} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \kappa) \langle \vec{q}_1, q_2 | \kappa \rangle \langle \kappa | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle \quad (5,8)$$

Чтобы написать матричный элемент  $\langle \kappa | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle$ , можно воспользоваться, как и в § 4, соображениями релятивистской инвариантности. Непосредственно используя формулу

$$\langle \kappa | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle = -ie \bar{U}_{\sigma_2}(\vec{p}_2) \gamma_{\kappa} U_{\sigma_1}(\vec{p}_1) \sqrt{\frac{M^2}{2\omega_{e,e_2}}}, \quad (5,9)$$

получаем

$$\begin{aligned} T_{M M} &= -\pi \sum_{\kappa} \int d\vec{\kappa} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \kappa) ie \bar{u}(q_2) \gamma_{\kappa} u(q_1) \bar{U}(\vec{p}_2) \gamma_{\kappa} U(\vec{p}_1) ie \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{M^2 m^2}{e, e_2, e_1, e_2}} = \\ &= \pi e^2 \sqrt{\frac{M^2 m^2}{e, e_2, e_1, e_2}} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \sum_{\kappa} \bar{u}(q_2) \gamma_{\kappa} u(q_1) \bar{U}(\vec{p}_2) \gamma_{\kappa} U(\vec{p}_1). \end{aligned} \quad (5,10)$$

/учтено, что заряд протона противоположен заряду электрона/. Здесь  $u$  - спинор электрона,  $U$  - спинор протона,  $e = q_0, e_{(1,2)} = p_{0(1,2)}$ . Учитывая, что  $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = \delta(t)$ , найдем

$$M = e^2 \sqrt{\frac{M^2 m^2}{e, e_2, e_1, e_2}} \frac{\bar{u}(q_2) \gamma_{\kappa} u(q_1) \bar{U}(\vec{p}_2) \gamma_{\kappa} U(\vec{p}_1)}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2} \quad (5,11)$$

При вычислении сечения снова рассмотрим случай неполяризованных частиц. При этом

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(\Sigma p) \frac{d\vec{p}_2 d\vec{q}_2}{j(2\pi)^6} \cdot \frac{1}{(p_1 p_2)^4} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4} e^4 \frac{M^2 m^2}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4} \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_3 \gamma_\nu u_2 \cdot \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 X$$

$$X \bar{u}_1 \gamma_\nu u_2 = \frac{d\vec{p}_2 d\vec{q}_2 \delta(\Sigma p)}{j(p_1 p_2)^4} \cdot \frac{(e^4 M^2 m^2)}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4} \cdot S_p \gamma_\mu \frac{-i\hat{q}_2 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{-i\hat{q}_2 + m}{2m} \cdot (5,12)$$

$$\cdot S_p \gamma_\mu \frac{-i\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{-i\hat{p}_2 + m}{2m}$$

/очевидно, что  $\bar{y}_\nu \bar{y}_\nu = \gamma_\nu \gamma_\nu$ .

Дальнейший расчет произведем в с.ц.м., в которой

$$\vec{q}_1 = -\vec{p}_1 = \vec{k}_c, \quad (p_1 + q_1)^2 = -W^2. \quad (5,13)$$

/  $k_c$  - импульс частиц в с.ц.м./ . Статистический вес в этой системе вычисляется следующим образом

$$g_f = d\vec{p}_2 d\vec{q}_2 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) = d\vec{q}_2 \cdot 2\epsilon_2 \delta(p_2^2 + M^2) \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) d^4 p_2 =$$

$$= 2\epsilon_2 \delta((p_1 + q_1 - q_2)^2 + M^2) d\vec{q}_2$$

$$(p_1 + q_1 - q_2)^2 + M^2 = (p_1 + q_1)^2 - 2(p_1 + q_1) \cdot q_2 + q_2^2 + M^2 = -W^2 + 2W\epsilon - m^2 + M^2.$$

$$d\vec{q}_2 = k^2 dk d\Omega = k\epsilon d\epsilon d\Omega,$$

так что

$$g_f = \frac{\epsilon k \epsilon}{W} d\Omega. \quad (5,14)$$

Поток равен

$$j = \frac{k}{\epsilon} + \frac{k}{\epsilon} = \frac{k W}{\epsilon \epsilon}. \quad (5,15)$$

Поэтому

$$d\sigma/d\Omega = \frac{\alpha^2}{16 W^2 (p_1 - p_2)^4} I_e I_p. \quad (5,16a)$$

$$I_e = S_p \gamma_\mu (-i\hat{q}_1 + m) \gamma_\nu (-i\hat{q}_2 + m) \quad (5,16b)$$

$$I_p = S_p \gamma_\mu (-i\hat{p}_1 + m) \gamma_\nu (-i\hat{p}_2 + m).$$

При вычислении следов такого вида очень удобно пользоваться формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S_{\mu} (\hat{A}_1 + a_1) (\hat{A}_2 + a_2) (\hat{A}_3 + a_3) (\hat{A}_4 + a_4) = & (A_1 A_2 + a_1 a_2) (A_3 A_4 + a_3 a_4) - \\ & (A_1 A_3 - a_1 a_3) (A_2 A_4 - a_2 a_4) + (A_1 A_4 + a_1 a_4) (A_2 A_3 + a_2 a_3), \end{aligned} \quad (5,17)$$

которая сразу дает результат

$$\begin{aligned} I_e &= -4 \left[ q_{1\mu} q_{2\nu} - \delta_{\mu\nu} (q_1 q_2 + m^2) + q_{1\nu} q_{2\mu} \right] \\ I_{\mu} &= -4 \left[ p_{1\mu} p_{2\nu} - \delta_{\mu\nu} (p_1 p_2 + M^2) + p_{1\nu} p_{2\mu} \right] \\ I_e I_{\mu} &= 32 \left[ (p_1 q_1)^2 + (p_1 q_2)^2 - \frac{1}{2} q^2 (M^2 + m^2) \right]. \end{aligned} \quad (5,18)$$

При преобразовании использованы соотношения

$$p_1 q_1 = p_2 q_2, \quad p_1 q_2 = p_2 q_1, \quad p_1 p_2 + M^2 = q_1 q_2 + m^2 = -\frac{(q_1 - q_2)^2}{2} = -\frac{q^2}{2}. \quad (5,19)$$

Используя формулы /см.прил. Б /

$$p_1 q_1 = \frac{-N^2 + M^2 + m^2}{2}, \quad p_1 q_2 = \frac{-N^2 + M^2 + m^2 + q^2}{2}, \quad (5,20)$$

получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{(N^2 - M^2 - m^2)^2 - N^2 q^2 + \frac{1}{2} q^4}{q^4}. \quad (5,21)$$

Введенная здесь инвариантная величина  $q^2$  совпадает с передачей импульса в с.ц.м. /так как  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 /$

$$q^2 = (\vec{q}_1 - \vec{q}_2)^2 = 4 \kappa_c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (5,22)$$

/  $\theta$  - угол рассеяния в с.ц.м./ . Импульс  $k_c$  выражается через  $\mu$  импульс электрона в л.с. преобразованием Лоренца

$$k_c = \frac{M}{\gamma} \mu \quad (5,23)$$

В нерелятивистском случае, когда  $M \approx M + m$ , наибольшим членом в формуле (5,21) оказывается первый, и мы приходим к формуле

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{нелр}} = \frac{\alpha^2 m^2 (M+m)^2}{4 M^2 \mu^4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad \text{или} \quad \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{нелр}} = \frac{\alpha^2}{4 \mu^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5,24)$$

$\mu = m M / (m + M)$  - приведенная масса системы электрон-протон/. Это - известная формула Резерфорда [18], исправленная с помощью приведенной массы на эффект отдачи. В случае рассеяния на тяжелой мишени можно положить  $\mu \approx m$ . Формула Резерфорда не содержит спинных эффектов - они исчезают в нерелятивистском пределе.

В релятивистском случае, когда  $E \approx \mu \gg m$ , но масса мишени велика  $E \ll M$ , в формуле (5,21) следует учитывать уже два члена

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{рл}} = \frac{\alpha^2}{4 E^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\mu^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5,25)$$

Эта формула выведена Н.Моттом [19]. Она применяется для расчета рассеяния релятивистской дираковской частицы на тяжелой мишени.

Формула (5,25) отличается от нерелятивистской формулы Резерфорда множителем  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ , появление которого обусловлено наличием спина у электрона. Он приводит к еще большей направленности вперед рассеянного пучка.

Интересно отметить, что в обоих рассмотренных предельных случаях третье слагаемое ( $\frac{1}{2}$ ) не существенный. Оно, однако, сказывается в промежуточной области. Как будет видно из дальнейшего, это слагаемое выражает эффект рассеяния магнитного момента в кулоновском поле протона.

Часто пользуются формулой Мотта в л.с. координат. Чтобы вывести ее, выразим в формуле (5,21) все величины в лабораторных и воспользуемся формулами (5,12) и (5,23) приложения Б. Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega_c} \cdot \frac{d\Omega_c}{d\Omega_L} = \frac{E^2/\kappa_c^2}{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} \cdot \frac{\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{4M^2 E^2 - M^2 q^2}{q^4} =$$

$$= \frac{\alpha^2 (4E^2 - q^2)}{q^4 \left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\alpha^2}{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} \left(4E^2 - \frac{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) \frac{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}{16E^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Окончательный результат очень похож на формулу (5,26)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_L}\right)_{\text{Мотт}} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (5,26)$$

Распределение рассеянных электронов по энергиям легко получить с помощью формулы (5,11)

$$q^2 = 2M\omega, \quad (5,27)$$

где  $\omega$  - кинетическая энергия электрона в л.с., пересчитав также дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{\pi dq^2/\kappa_c^2} = \frac{\kappa_c^2}{2\pi M} \cdot \frac{d\sigma}{d\omega}. \quad (5,28)$$

Мы получаем

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{2\pi M}{\kappa_c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{N^2} \cdot \frac{(\omega^2 - M^2 - m^2)^2 - 2M\hbar^2 \omega + 2M^2 \omega^2}{4M^2 \omega^2}. \quad (5,29)$$

рассеянии заряд /и момент/ участвуют только частично

$$e = e_0 F_1(q^2) , \quad \lambda = \lambda_0 F_2(q^2). \quad (5,49)$$

Формула Ровенблута с учетом этих обстоятельств примет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \sigma_{\text{Мотт}}(s) \left\{ F_1^2 + \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \lambda F_2)^2 \left( \frac{q^2}{2} + \frac{\lambda^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \right\}. \quad (5,50)$$

Сравнение этой формулы с опытом позволяет найти функции  $F_1, F_2$ , описывающие структуру протона. Они связаны с соответствующими плотностями формулой

$$F(q^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r}, \quad (5,51)$$

где

$$\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = 1. \quad (5,52)$$

Предполагая, что распределение плотности заряда и аномального магнитного момента сферически симметрично, можем записать эти уравнения в виде

$$F(q^2) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \frac{\sin qr}{qr}, \quad 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1. \quad (5,53)$$

При малых  $q^2$ , благодаря  $\sin qr/qr = 1 - (qr)^2/6 + \dots$ , получаем

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6} q^2 \cdot 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr = 1 - \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6} + \dots \quad (5,54)$$

$\langle r^2 \rangle$  - средний квадрат радиуса распределения. Таким образом, по наклону кривых  $F(q^2)$  вблизи  $q^2 = 0$  можно определить электрический и магнитный радиусы протона

$$\langle r^2 \rangle = -6 F'(0). \quad (5,55)$$

Они оказались совпадающими [17]

$$\langle r^2 \rangle_{эл} = \langle r^2 \rangle_{маг} = \frac{0,32}{M_\pi^2} \pm 10\% \quad (5,56)$$



Поэтому получается

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_L} \right)_{\text{Мотт}} \left\{ 1 + \frac{q^2}{4M^2} \left[ 2(\lambda+1)^2 + 9\frac{q^2}{2} + \lambda^2 \right] \right\} \quad (5,48)$$

При сравнении этой формулы с опытом Р.Хофстадтер установил, что угловое распределение, предсказываемое ею, не согласуется с опытными данными /см.рис. 10/. Вместе с тем формула Мотта

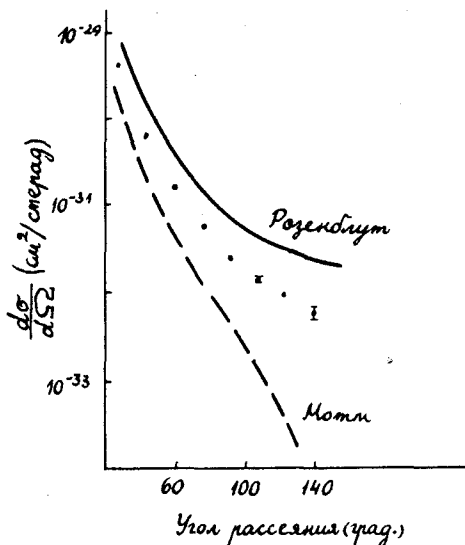


Рис. 10

также не может быть признана правильной.

Единственным объяснением этого факта может служить только одно соображение: при столь высоких энергиях сказывается внутренняя структура протона. Действительно, электрон большой энергии способен проникнуть внутрь, оставив снаружи часть его заряженного облака. Согласно законам электродинамики, эта часть не может оказать воздействия на электрон. Поэтому в

что и приводит к указанной формуле.

Если  $\lambda \neq 0$ , то к моттовскому слагаемому добавляется  $8q^4$ , отмеченное нами выше /стр. 52/. Оно представляет собой рассеяние на нормальном магнитном моменте протона. Изчезновение его в ультрарелятивистском пределе означает, что дираковский /нормальный/ магнитный момент исчезает при больших энергиях.

Слагаемые в (5,43) при  $\lambda \neq 0$  впервые найдены М.Розенблутот [20]. Аномальный магнитный момент частично складывается с нормальным, а частично рассеивает сам. В ультрарелятивистском пределе его вклад в сечение не исчезает.

Обычно формулу Розенблута записывают в л.с. Чтобы сделать это, мы переведем все величины в эту систему, используя формулы из прил. Б.

Моттовская часть сечения имеет вид /ср. с  $\phi$ -лами (5,27) и (5,16a)/:

$$I_M = 64M^2 \frac{E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5,45)$$

Магнитные слагаемые таковы:

а/

$$8q^4(\lambda+1)^2 = 8q^2 \cdot \frac{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} (\lambda+1)^2 = I_M \frac{(\lambda+1)^2 q^2}{2M^2} tg^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5,46)$$

б/

$$\begin{aligned} \frac{16\lambda^2 q^2}{M^2} [(P \cdot Q)^2 + \frac{1}{4} q^2 P^2] &= \frac{16\lambda^2 q^2}{M^2} \left[ \left( \frac{E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} - ME \right)^2 + \right. \\ &\left. \frac{E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left( -\frac{E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} - ME \right) \right] = \frac{16\lambda^2 q^2 E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = I_M \cdot \frac{\lambda^2 q^2}{4M^2}. \end{aligned} \quad (5,47)$$

Запишем электронный след  $I_e$  /ф-ла (5,18) / в аналогичном виде

$$I_e = -2(4Q_\mu Q_\nu + q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \quad Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2). \quad (5,40)$$

Очевидно,

$$Q \cdot q = 0, \quad Q^2 = -m^2 - \frac{q^2}{4}, \quad P \cdot Q = (p_1 \cdot q_1) + \frac{q^2}{4}. \quad (5,41)$$

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = P + Q, \quad q = p_1 - p_2 = q_2 - q_1.$$

Теперь находим

$$\begin{aligned} I_e I'_p &= 4[16(P \cdot Q)^2 + 4q^2 Q^2 + 4q^2 P^2 + 3q^4] + 8\lambda(4q^2 Q^2 + 3q^4) + \\ &+ 4\lambda^2(4q^2 Q^2 + 4q^2 \frac{(PQ)^2}{M^2} + 3q^4 + q^4 \frac{P^2}{M^2}) - 4[16(p_1 \cdot q_1)^2 - 4q^2 s + 2q^4] + \\ &+ 16\lambda q^2(q^2 - 2m^2) + 8\lambda^2 q^2[q^2 - 2m^2 + 2(PQ)^2/M^2 + q^2 P^2/2M^2]. \end{aligned} \quad (5,42)$$

Нетрудно убедиться, что слагаемое в первой скобке дает выражение (5,21), что и должно быть при  $\lambda \rightarrow 0$ . Два последних слагаемых в (5,42) представляют собой поправку на аномальный магнитный момент протона. Эти члены становятся заметными лишь при достаточно большой энергии. Поэтому в формуле (5,42) обычно пренебрегают массой электрона. Тогда

$$I_e I'_p = 16[4(p_1 \cdot q_1)^2 - q^2 s] + 8q^4(\lambda + 1)^2 + 16\lambda^2 q^2 \left[ \frac{(PQ)^2}{M^2} + \frac{q^2 P^2}{4M^2} \right]. \quad (5,43)$$

Эта формула записана так, что первое слагаемое дает сечение рассеяния на силовом центре /ф-лу Мотта/. Действительно,

$$\begin{aligned} 16(4M^2 E^2 - 4s p_c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) &= 64[M^2 E^2 - M^2(E^2 - m^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}] = \\ &= 64 M^2 E^2 (1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}), \end{aligned} \quad (5,44)$$

более сложный вид, чем в формуле (5,9)

$$\langle q_{\mu}/r_1 r_2 \rangle = -ieU(r_2) \left( \gamma_{\mu} + \frac{\lambda}{2M} \gamma_{\mu} \gamma_0 \right) U(r_1). \quad (5,35)$$

Здесь  $\lambda$  - число, выражающее аномальную часть магнитного момента в долях  $e/2M$ : у протона  $\lambda_p = 1,79$ . Вследствие изменения матричного элемента изменится и сечение. Это изменение, как легко видеть, сводится к усложнению формулы для  $I_p$ :

$$I'_p = S_p \left( \gamma_{\mu} + \frac{\lambda}{2M} \gamma_{\mu} \gamma_0 \right) (-i\hat{r}_1 \cdot M) \left( \gamma_{\nu} - \frac{\lambda}{2M} \gamma_{\nu} \gamma_0 \right) (-i\hat{r}_2 \cdot M). \quad (5,36)$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить  $I'_p$  и, сравнив его с  $I_p$ , выяснить роль аномального магнитного момента протона в рассеянии электронов. Уже без расчета из (5,35) видно, что магнитный момент больше всего влияет на рассеяние в области больших углов, где вектор  $q = r_1 - r_2$  велик. В этой области влияние заряда и нормальной части магнитного момента заметно спадает /см. напр. ф-лу Мотта/, так что имеются все предпосылки для наблюдения ожидаемого эффекта.

Вычисление следа проводится в прил. В, откуда мы и возьмем результат

$$\begin{aligned} I'_p = & -2(4P_{\mu}P_{\nu} + q^2\delta_{\mu\nu} - q_{\mu}q_{\nu}) - 4\lambda(q^2\delta_{\mu\nu} - q_{\mu}q_{\nu}) - \\ & - 2\lambda^2(q^2\delta_{\mu\nu} - q_{\mu}q_{\nu} + q^2 \frac{P_{\mu}P_{\nu}}{M^2}). \end{aligned} \quad (5,37)$$

Напомним, что

$$q = r_1 - r_2; \quad P = \frac{1}{2}(r_1 + r_2). \quad (5,38)$$

Отсюда следует, что

$$P \cdot q = 0; \quad P^2 = -M^2 - \frac{q^2}{4}. \quad (5,39)$$

Нерелятивистское приближение к этой формуле

$$(d\sigma/d\omega)_{\text{нерел}} = \frac{\pi^2 m \alpha^2}{M E_L \omega^2} \quad (5,30)$$

$E_L$  - кинетическая энергия налетающего электрона/легко получается и из (5,24). Поправка на спин вычисляется из формулы Мотта

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{\text{Мотта}} = \frac{2\pi \alpha^2}{M \omega^2} \left(1 - \frac{M\omega}{2E^2}\right). \quad (5,31)$$

Форма распределения по  $\omega$  существенно изменяется только в области максимально возможных энергий, где существенную роль играет спиновая поправка.

При расчете сечений мы предполагали, что протон является такой же дираковской частицей, как и электрон. Это предположение, однако, неправильно, в чем проще всего убедиться, сравнив их магнитные моменты. У электрона он равен с большой точностью одному магнетону Бора  $e/2m$ , тогда как у протона магнитный момент составляет  $2,79 \cdot (e/2M)$ . Следовательно, сверх нормальной дираковской части протон имеет аномальный магнитный момент

$$\mu = 1,79 (e/2M). \quad (5,32)$$

Этому соответствует дополнительная магнитная энергия  $\mu \vec{\sigma} \vec{H}$  или в релятивистски-инвариантной записи

$$\frac{1}{2} \mu \gamma_{50} H_{50} = -\mu \gamma_{50} q_5 A_0 = \mu \gamma_{50} q_0 A_5. \quad (5,33)$$

Здесь

$$\gamma_{50} = \frac{\gamma_5 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_5}{2i} = \gamma_{50}^* = -\gamma_{05} \quad (5,34)$$

матрицы спина, а  $q$  - 4-вектор импульса фотона.

Благодаря наличию магнитного момента матричный элемент взаимодействия протона с фотоном будет иметь

Эти опыты явились первым прямым доказательством сложной внутренней структуры протона. Численное значение радиуса (5,56) приводит к ряду заключений, так как радиус нуклона  $R = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$  оказывается  $\approx 0,6/\mu_\pi$ , тогда как общая протяженность мезонного поля нуклона  $\sim 1/\mu_\pi$ . Следовательно, периферия нуклона является очень разреженной. Поэтому при взаимодействиях с небольшой энергией, когда затрагивается в основном периферия, оправданы многие приближенные методы /например, теория возмущений или одно-частичное приближение в дисперсионном методе/, хотя связь остается сильной /на это обратили внимание Л.Окунь и И.Померанчук [21] /

Увеличив энергию электронов до 600 Мэв, Хофштадтер сумел промерить  $F(q^2)$  вплоть до  $q^2 \approx 2M_\pi^2$ , а в опытах Р.Уилсона [22] измерения доведены до  $q^2 \approx 3M_\pi^2$ . В этой области  $F_1(q^2)/F_2(q^2) = 1,23 \pm 0,20$ , то есть их можно считать совпадающими. Анализ опытов показывает, что форм-фактор можно представить формулой

$$F(q^2) = \left(1 + \frac{1}{2} q^2 \langle r^2 \rangle\right)^{-2}, \quad (5,57)$$

где  $\langle r^2 \rangle$  - величина, данная в (5,56).

Сразу же отметим, что современная теория вряд ли может получить такое выражение. Действительно, если  $F(q^2)$  аналитична, то

$$F(q^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(z) dz}{z - q^2}. \quad (5,58)$$

Чтобы получить отсюда (5,57), необходимо иметь

$$\rho(z) = \frac{144}{\langle r^2 \rangle^2} \delta' \left( z + \frac{12}{\langle r^2 \rangle} \right). \quad (5,59)$$

Такого рода вид  $\rho(z) \propto \delta' \left( z + \frac{12}{\langle r^2 \rangle} \right)$  очень странный. Его надо понимать как

$$\rho(z) = \frac{144}{\langle r^2 \rangle^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta \left( z + \frac{12}{\langle r^2 \rangle} + \varepsilon \right) - \delta \left( z + \frac{12}{\langle r^2 \rangle} \right)}{\varepsilon}, \quad (5,60)$$

то есть следует допустить, что некоторые состояния входят в  $\mathcal{I}_m F(z)$  с отрицательным знаком, что соответствует отрицательным вероятностям. Ничего удивительного в этом нет, так как современная теория в равной мере считает бессмысленными рассуждения о структуре заряда и об отрицательных вероятностях.

Появление последних тесно связано с введением представления о структурной частице — оба понятия "табу"!

В 1960 г. Хофстадтер опубликовал предварительные сведения, полученные на пучке электронов от Стэнфордского ускорителя с энергией  $\sim 1000$  Мэв и  $q^2 \leq 6 M_p^2$ . Поведение форм-факторов в этой области еще более поразительно

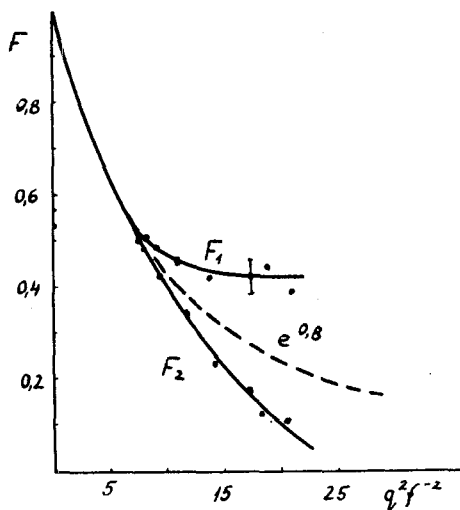


Рис. 11

Такое поведение при больших  $q^2$  означает, что дисперсионные соотношения должны иметь вид

$$F_1(q^2) = F_1(0) + q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(z) dz}{z(z-q^2)} \quad (5,61a)$$

$$F_2(q^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_2(x) dx}{x - q^2} . \quad (5,616)$$

Очевидно,  $F_2(0) = 1$ . Предельная величина  $F_2(\infty)$  равна

$$F_2(\infty) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_2(x) dx}{x} . \quad (5,62)$$

Величина этого интеграла, как показывает рис.11, равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_2(x) dx}{x} = + (0,57 \pm 0,04) . \quad (5,63)$$

Что означает физически выход  $F_2(q^2)$  на плато? Постоянство по  $q^2$  есть, ввиду преобразования Фурье,  $\delta$ -образность в координатном пространстве. Следовательно, это значит, что часть заряда - 43 % - сосредоточена в области с радиусом, гораздо меньшим  $\sqrt{1/q^2} \sim \sqrt{6} M_\pi^{-1} \sim 0,4 M_\pi^{-1}$  <sup>10)</sup>

Аномальный магнитный момент /т.е. то.и, создающие его/ распределен более равномерно и в этой области.

## § 6. Рассеяние $\pi$ -мезонов на электронах

Теория этого эффекта усиленно разрабатывалась в 30-х гг. /основные результаты расчетов приведены в книгах [23,24] /. В то время спин мезонов не был известен и высказывалось мнение, что его можно определить измеряя угловое распределение или энергетический спектр электронов отдачи.

В том, что такая взаимосвязь действительно существует, нетрудно убедиться, рассматривая формулы (5,8) и (5,9). Если спин мезона равен  $1/2$ , то для него, как и для протона, следует использовать матричный элемент испускания фотона в виде /ср. (5,9) /

$$\langle \kappa p_2 | p_1 \rangle = -ie \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) e_\mu \sqrt{\frac{m^2}{2\omega e_1 e_2}} . \quad (6,1)$$

10) В настоящее время /1965 г./ нет указаний на наличие плато в зависимости  $F_2(q^2)$ .



Это имеет место в случае рассеяния  $\mu$ -мезонов, так что к ним полностью применимы все выводы предыдущего параграфа.

Если же спин мезона равен нулю, то

$$\langle \kappa r_2 / r_1 \rangle = e F(k^2) (\mu_1 + \mu_2) \mu e_\mu \sqrt{\frac{1}{8\omega e_1 e_2}}. \quad (6,2)$$

Здесь стоит сумма импульсов мезона до и после рассеяния, так как любая линейная комбинация

$$a r_1 + b r_2 = \frac{a+b}{2} (\mu_1 + \mu_2) + \frac{a-b}{2} (\mu_1 - \mu_2) = \frac{a+b}{2} (\mu_1 + \mu_2) + \frac{a-b}{2} \kappa$$

в силу поперечности фотона ( $\kappa \cdot e = 0$ ) сводится к их сумме. В формуле также учтен электромагнитный форм-фактор мезона.

Это значит, что в выражении (5,16а) для дифференциального сечения следует вместо  $I_p$  подставить величину

$$-2F^2(q^2) (\mu_1 + \mu_2) \mu (\mu_1 + \mu_2), \quad (6,3)$$

Следовательно, в этом случае

$$I_e I_p = 8F^2(q^2) \left\{ 2 [q_1 \cdot (\mu_1 + \mu_2)]^2 - (\mu_1 + \mu_2)^2 (q_1 \cdot q_2 + m^2) \right\} \quad (6,4)$$

и мы получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 F^2(q^2)}{2N^2 q^4} \left\{ 2 [q_1 \cdot (\mu_1 + \mu_2)]^2 - (\mu_1 + \mu_2)^2 (q_1 \cdot q_2 + m^2) \right\} \quad (6,5)$$

Если подставить значения инвариантов /см.прил. Б /

$$\begin{aligned} 2q_1 \cdot \mu_1 &= -N^2 + M^2 + m^2, & 2q_1 \cdot \mu_2 &= -N^2 + M^2 + m^2 + q^2, \\ (\mu_1 + \mu_2)^2 &= -4M^2 - q^2, & q_1 \cdot q_2 + m^2 &= -q^2/2, \end{aligned} \quad (6,6)$$

то получим

$$\sigma(\theta) = \frac{\alpha^2 F^2}{q^4} \cdot \frac{N^2 - m^2}{N^2} \left[ \frac{(N^2 - M^2 - m^2)^2}{N^2 - m^2} - q^2 \right]. \quad (6,7)$$

Угловое распределение в с.ц.м. получится, если выразить  $q^2$  через  $\theta$ :  $q^2 = 4\mu_c^2 \sin^2 \theta/2$ . Если же написать

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\pi}{\mu_c^2}\right)^{-1} \frac{d\sigma}{dq^2}, \quad (6,8)$$

то можно получить распределение по инвариантной передаче импульса. В л.с., где

$$q^2 = 2mE_e' \quad (6,9)$$

$E_e'$  — кинетическая энергия электрона после рассеяния/. Эта же формула дает спектр электронов отдачи. Он имеет пик вблизи  $E_e' = 0$ :

$$d\sigma/dE_e' \sim 1/(E_e')^2, \quad (6,7a)$$

что совпадает со спектром, предсказываемым формулой Резерфорда. Строго говоря, при столь малых передачах импульса следовало бы учесть экранирование кулоновского поля на далеких расстояниях, заменив "пропагатор"  $1/q^2$  на  $1/(q^2 + q_0^2)$  /  $q_0 = 1/R$ ,  $R$  — эффективный радиус экранирования/. Это приводит к конечной величине полного рассеяния

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{\mu_c^2} A \int_0^{q_0^2} \frac{B-x}{(x+q_0^2)^2} dx + \frac{\pi\alpha^2 A}{\mu_c^2} \left\{ \frac{4\mu_c^2(B+q_0^2)}{q_0^2(q_0^2+4\mu_c^2)} + \ln \frac{q_0^2}{q_0^2+4\mu_c^2} \right\} \quad (6,10)$$

$A = (W^2 - m^2)/W^2$ ;  $B = (W^2 - M^2 - m^2)^2 / (W^2 - m^2)$ . При достаточно большой энергии это выражение можно приближенно представить в виде

$$\sigma \approx \frac{4\pi\alpha^2}{W^2} \left( \frac{W^2}{q_0^2} + \ln \frac{q_0^2}{W^2} \right) \approx \frac{4\pi\alpha^2}{q_0^2} = 4\pi\alpha^2 R_{\text{эфф}}^2 \quad (6,11)$$

Сравним формулы для рассеяния мезонов со спинами 0 и 1/2:

$$\text{спин } 0: d\sigma/dq^2 = (\pi\alpha^2/\mu_c^2 W^2) \frac{1}{q^4} \left\{ (W^2 - M^2 - m^2)^2 - (W^2 - m^2) q^2 \right\}. \quad (6,7)$$

$$\text{спин } 1/2: d\sigma/dq^2 = (\pi\alpha^2/\mu_c^2 W^2) \frac{1}{q^4} \left\{ (W^2 - M^2 - m^2)^2 - W^2 q^2 + \frac{1}{2} q^4 \right\}. \quad (5,29)$$

Если на опыте удастся наблюдать появление слагаемого  $\sim q^4$ , то этот опыт позволяет определить спин мезона. К сожалению, эффект слишком мал, чтобы он мог стать реальным средством для измерения спина. Слагаемые  $\sim q^4$  могут возникнуть и в случае спина 0, если передача импульса достигает величины  $\sim 1/\kappa$ , где  $\kappa$  - радиус мезона. Тогда в формуле (6,7) необходимо учитывать формфактор

$$F^2(q^2) = 1 - q^2 \langle r^2 \rangle / 3 + \dots \quad (6,12)$$

и коэффициент при  $q^2$  получит множитель

$$1 + \frac{\langle r^2 \rangle}{3} \frac{(W^2 - M^2)^2}{W^4}. \quad (6,13)$$

Если  $\langle r^2 \rangle \approx 1/4 M_\pi^2$ , то этот множитель отличается от 1 на  $\approx 33\%$  при энергии  $\pi$ -мезона, равной 95 Бэв в л.с., и на 8% при энергии  $\approx 30$  Бэв. При энергии 17 Бэв /ускоритель ЦЕРН а/ поправка равна  $0,14 M_\pi^2 \langle r^2 \rangle$  и позволяет наблюдать радиус  $\sim 1/2 M_\pi$ , если обеспечена точность, лучшая, чем  $\sim 4\%$ .

## § 7. Тормозное излучение и образование пар

Указанные в заголовке данного параграфа процессы являются простейшими неупругими электромагнитными процессами. Их расчет может быть проведен на основе дисперсионной методики совершенно аналогично расчетам комптоновского или резерфордского рассеяния.

Рассмотрим сначала излучение фотона частицей вследствие торможения в поле ядра /тормозное излучение/. Если пренебречь энергией, передаваемой ядру, то его поле можно рассматривать статически, т.е. полагать

$$A_\mu = Zea_\mu(q), \quad a_\mu(q) = \frac{i\delta_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (7,1)$$

Если ввести "псевдофотон" поля ядра с вектором поляризации  $a_\mu$ , то взаимодействие с ядром будет состоять в поглощении и испускании таких "псевдофотонов" частицей.

Соотношение унитарности принимает вид

$$T_m T = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \langle p_2 k / n \rangle^* \langle n / p_1 q \rangle \delta^4(p_1 + q - p_2), \quad (7,2)$$

где  $p_1(p_2)$  - импульс частицы до /после/ столкновения,  $q$  - импульс, переданный ядру,  $k$  - импульс фотона. Это соотношение может быть представлено графически

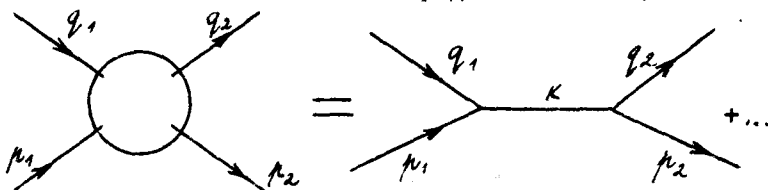


Рис. 12

/кросс-симметричное слагаемое появляется, как и в § 4: оно получается при замене  $q \rightleftharpoons -k, p \rightleftharpoons p'$ .

Дальнейший расчет мы проведем для бесспиновых частиц /речь может идти, например, о торможении  $\pi$ -мезонов ядрами/, учитывая в сумме по  $n$  только одночастичные промежуточные состояния

$$T_m T = \frac{(2\pi)^4}{2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \delta^4(p_1 + q - p) \langle p_2 k / p \rangle^* \langle p / p_1 q \rangle. \quad (7,2a)$$

Матричный элемент  $\langle r/r_2 k \rangle$  встречался в § 6:

$$\langle r/r_2 k \rangle = e(r_1 + r_2)_k e_k \sqrt{\frac{1}{8\omega e_1 e_2}} \quad (7,3)$$

Таким образом 11)

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{т}} T &= \pi e^2 \int \frac{d\vec{r}}{2e} \delta^4(r_2 + k - r)(r + r_1)_\nu A_\nu(r + r_1)_k e_k \sqrt{\frac{1}{8e_1 e_2 \omega}} = \\ &= \pi Z e^3 \delta((r_2 + k)^2 + \mu^2) e_k a_\nu \frac{(r_1 + r_2 + k)_\nu (2r_2 + k)_k}{\sqrt{8e_1 e_2 \omega}}. \end{aligned} \quad (7,4)$$

Следовательно, /добавляя перекрестное слагаемое/ получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z e^3 e_k q_\nu}{\sqrt{8e_1 e_2 \omega}} \left\{ \frac{(r_1 + r_2 + k)_\nu (2r_2 + k)_k}{(r_2 + k)^2 + \mu^2} + \frac{(r_1 + r_2 - q)_\nu (2r_2 - q)_k}{(r_2 - q)^2 + \mu^2} \right\} = \\ &= \frac{Z e^3 e_k a_\nu}{\sqrt{8e_1 e_2 \omega}} \left\{ \frac{(r_1 + r_2 + k)_\nu (2r_2 + k)_k}{(r_2 + k)^2 + \mu^2} + \frac{(2r_1 - k)_\nu (r_1 + r_2 - k)_k}{(r_1 - k)^2 + \mu^2} \right\}. \end{aligned} \quad (7,5)$$

С помощью соотношений

$$k \cdot e = 0, \quad q \cdot a = 0 \quad (7,6)$$

можно упростить матричный элемент до такого:

$$T = \frac{4Ze^3}{\sqrt{8e_1 e_2 \omega}} e_k a_\nu \left\{ \frac{P_{2k} P_{1\nu}}{(r_2 + k)^2 + \mu^2} + \frac{P_{1k} P_{2\nu}}{(r_1 - k)^2 + \mu^2} \right\}. \quad (7,7)$$

11) Заметим, что у "псевдофотона"  $A_\nu$  нет нормировочного множителя  $1/\sqrt{2\omega_q}$ , так как он учтен уже в выражении (7,1), которое можно было бы получить из  $1/\sqrt{2\omega_k}$ , интегрируя по импульсу ядра /аналогично выводу формулы Резерфорда/.

Следует отметить, что соотношения (7,6) имеют разный физический смысл: первое выражает поперечность налучаемого фотона, а второе - равенство нулю энергии, передаваемой ядру.

Подставляя (7,1), запишем матричный элемент в 3-мерном виде

$$T = \frac{4Ze^3}{\sqrt{8e_1e_2\omega}} \frac{-i}{q^2} \left( \vec{e}; \frac{e_2}{x_2} \vec{p}_1 + \frac{e_1}{x_1} \vec{p}_2 \right) = \frac{4Ze^3}{\sqrt{8e_1e_2\omega}} \frac{-i}{q^2} (\vec{e} \vec{L}). \quad (7,7a)$$

$1/x_1 = (p_1 + k)^2 + \mu^2$ ;  $x_2 = (p_1 - k)^2 + \mu^2$ , а сечение получим по обычным правилам:

$$d\sigma = \frac{|T|^2}{\int} \frac{d\vec{p}_2 d\vec{k} d\vec{q}}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q - p_2 - k). \quad (7,8)$$

Поток равен  $j = |p_1|/e_1$ . Импульс ядра устраним с помощью  $\delta$ -функции, после чего находим

$$d\sigma = \frac{|T|^2}{|p_1|e_1} \cdot \frac{d\vec{p}_2 d\vec{k}}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(e_1 - e_2 - \omega). \quad (7,8a)$$

Проведем обычные упрощения:

$$d\vec{p}_2 \delta(e_1 - e_2 - \omega) = |p_2| e_2 d\epsilon_2 d\Omega_2 \delta(e_1 - e_2 - \omega) = |p_2| e_2 d\Omega_2; \\ d\vec{k} = \omega^2 d\omega d\Omega; \quad (7,9)$$

$$d\sigma = \frac{Z_1}{|p_1|} \cdot \frac{16Z^2(4\pi\alpha)^3}{8e_1e_2\omega} \cdot \frac{(\vec{e} \vec{L})^2}{q^4} \cdot \frac{\mu_1 e_2 d\Omega_2 \cdot \omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi)^5} = \\ = \frac{4Z^2\alpha^3}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{q^4} \left( \vec{e}; \frac{e_2}{x_2} \vec{p}_1 + \frac{e_1}{x_1} \vec{p}_2 \right)^2 \omega d\omega d\Omega d\Omega_2.$$

Суммирование по поляризациям

$$\sum_{\text{пол}} (\vec{e} \vec{L})^2 = \vec{L}^2 - \left( \frac{\vec{e} \vec{L}}{\omega} \right)^2 = [\vec{n} \vec{L}]^2 \quad (7,10)$$

$\vec{n}$  - единичный вектор в направлении распространения

фотона/ приводит сечение к виду

$$d\sigma = \frac{4Z^2\alpha^3}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{q^4} [\vec{n} \vec{L}]^2 \omega d\omega d\Omega d\Omega_2. \quad (7,11)$$

В нерелятивистском случае

$$e_1 = e_2 = \mu; \quad \kappa_1 = -\kappa_2 = -2\mu\omega, \quad \vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2. \quad (7,12)$$

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2} \cdot \frac{(\vec{e} \vec{q})^2}{q^4} \cdot \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \quad (7,13a)$$

$$\sum_{\text{пол}} d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2} \cdot \frac{[\vec{n} \vec{q}]^2}{q^4} \cdot \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2. \quad (7,13b)$$

Рассмотрим следствия этих формул:

1/ Угловое распределение зависит от угла  $\phi = (\vec{e}, \vec{q})$  по закону /см. (7,13b)/

$$I = I_0 \sin^2 \phi. \quad (7,14)$$

Оно симметрично относительно плоскости, перпендикулярной  $\vec{q}$ , и достигает максимума, когда  $\vec{e}$  лежит в этой плоскости.

2/ Степень поляризации зависит от направления распространения фотона. Если рассмотреть случай, когда фотон излучается в направлении, перпендикулярном  $\vec{p}_1$ , то расчет можно довести до простого результата [25].

Вектор поляризации  $\vec{e}$  может быть направлен либо по  $\vec{p}_1$ , либо перпендикулярно ему. Имеем

$$J_{\parallel} \sim \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta (\mu_1 - \mu_2 \cos \theta)^2}{(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \cos \theta)^2} = \frac{\pi}{\mu^2} \left( 2 - \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{\mu_1 \mu_2} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right) \quad (7,15a)$$

$$J_{\perp} \sim \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \frac{(\mu_2 \sin \theta \sin \alpha)^2}{(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \cos \theta)^2} = \frac{\pi}{2\mu^2} \left( -2 + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right). \quad (7,15b)$$

$$P = \frac{J_n - J_1}{J_n + J_1} \left[ 6\mu_1\mu_2 + (\mu_1^2 - 3\mu_2^2) \ln \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right] : \left[ 2\mu_1\mu_2 + (3\mu_1^2 - \mu_2^2) \ln \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right]. \quad (7,16)$$

Когда  $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$  /высоочастотная граница спектра/  $P \rightarrow +1$  - фотон поляризован вдоль  $\vec{\mu}_1$ . На низкочастотной границе ( $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ )  $P \rightarrow -1$ , т.е. поляризация перпендикулярна  $\vec{\mu}_1$ .

3/ Полное сечение получается из (7,13б) или (7,14) интегрированием по углам фотона

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{\pi^2} \cdot \frac{8\pi}{3q^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \cdot d\Omega_2. \quad (7,17)$$

Эта формула дает угловое распределение рассеянных частиц

$$d\sigma/d\Omega_2 \sim (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2 \cos \theta)^{-1} \quad (7,18)$$

с максимумом вперед, причем этот максимум тем острее, чем ближе  $\mu_1$  к  $\mu_2$  /т.е. чем меньше энергия фотона/. Интегрирование по  $d\Omega_2$  дает спектральное распределение излучения:

$$d\sigma = \frac{16}{3} \frac{Z^2 \alpha^3}{\mu_1^2} \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} = \sigma_0 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (7,19)$$

График этой зависимости приводится на рис. 13.

$$\sigma_0 = \frac{16}{3} \frac{Z^2 \alpha^3}{\mu_1^2}. \quad (7,20)$$

Поведение при  $\omega \rightarrow 0$  определяется тем, что мы пользовались потенциалом ядра в форме (7,1) вплоть до  $q^2 = 0$ . Тактически торможение происходит всегда на атомах и на далеких расстояниях /малые  $q^2$ / становится существенным экранирование поля ядра электронной оболочкой. Если учесть его, как и в § 3, путем замены



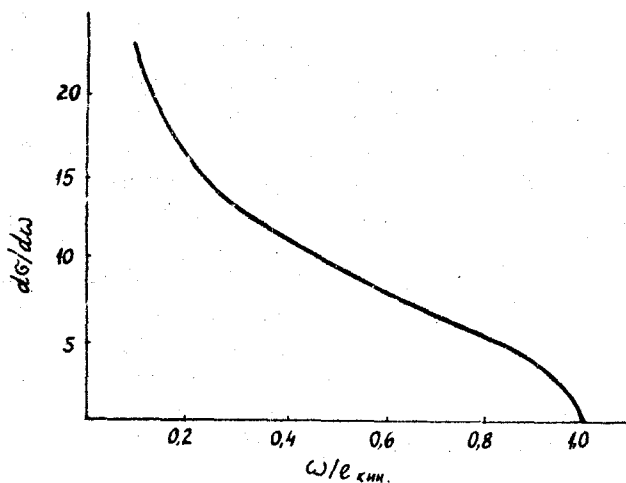


Рис. 13

$$1/q^2 \rightarrow 1/(q^2 + q_0^2) \quad (7,21)$$

$q_0$  - импульс экранирования,  $q_0 = 1/R$ ,  $R$  имеет порядок радиуса атома/, то тогда в формуле (7,19) логарифм заменится выражением  $\frac{1}{2} \ln \frac{(p_1 + p_2)^2 + q_0^2}{(p_1 - p_2)^2 + q_0^2}$ , которое при  $p_2 \rightarrow p_1$

( $\omega \rightarrow 0$ ) остается конечным. Как показывает формула (7,20), сечение тормозного излучения падает с энергией медленнее  $\sim E^{-1}$ , чем сечение упругого рассеяния  $\sim E^{-2}$ . Поэтому при большой энергии основной вклад в полное сечение дает тормозное излучение. Формула (7,13а) совпадает с формулой А.Зоммерфельда [26], полученной в нерелятивистской теории тормозного излучения. Релятивистские эффекты зависят от спина частицы и поэтому мы их не рассматриваем.

Тот же матричный элемент (7,7а) позволяет найти сечение образования пары в поле ядра. Для этого следует в нем сделать замену

$$p_- \rightarrow -p_+ ; p_2 \rightarrow p_- ; k \rightarrow -k. \quad (7,22)$$

Поток фотонов равен 1, так что сечение равно

$$d\sigma = |T|^2 \frac{d\vec{p}_+ d\vec{p}_-}{(2\pi)^6} 2\pi \delta(e_+ e_- - \omega) = \frac{4Z^2 \omega^3}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_+ \mu_-}{\omega q^4} (\vec{e} \vec{L})^2 d\epsilon_+ d\Omega_+ d\Omega_- \quad (7,23)$$

При  $\omega \rightarrow 2\mu$  обе частицы пары имеют малые энергии и можно писать

$$(\vec{e} \vec{L})^2 = \frac{1}{4\omega^2} (\vec{e}; \vec{p}_+ + \vec{p}_-)^2. \quad (7,24)$$

Максимум углового распределения вследствие этого лежит в плоскости, содержащей вектор поляризации фотона /см.рис.14/

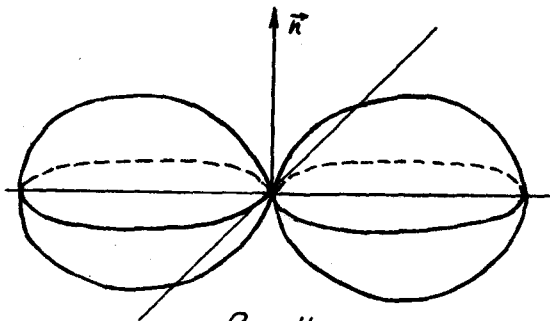


Рис.14

Интересно отметить, что угловое распределение зависит только от направления вектора  $\vec{p}_+ + \vec{p}_-$ . Вектор  $\vec{p}_+ - \vec{p}_-$  распределен изотропно.

Благодаря множителю  $\mu_+ \mu_-$  энергетическое распределение имеет максимум при  $\epsilon = \omega/2$ . С ростом энергии этот максимум расщепляется на два:  $\epsilon_1 \sim \mu$ ,  $\epsilon_2 \sim \omega$ .

Усредненное по поляризациям сечение образования пар равно

$$\overline{d\sigma} = \frac{2Z^2 \omega^3}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_+ \mu_-}{\omega q^4} \cdot [\vec{k} \vec{L}]^2 d\epsilon_+ d\Omega_+ + d\Omega_- \quad (7,25)$$

Анализ этого выражения см. в книгах [25,26].

### § 8. Магнитный момент электрона

Выше мы уже неоднократно встречались с матричным элементом испускания фотона  $\langle q, \mu | p_1 \rangle$ . Если фотон поляризован вдоль оси  $\mu$ , то этот элемент может быть написан в двух формах

$$\begin{aligned} j_\mu &= \langle q, \mu | p_2 | p_1 \rangle = ie \bar{u}(p_2) (F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \gamma_\mu \gamma_5) u(p_1) = \\ &= ie \bar{u}(p_2) (G_1(q^2) \gamma_\mu + i G_2(q^2) P_\mu) u(p_1) \quad (8,1) \end{aligned}$$

$$G_1 = F_1 + 2m F_2, \quad G_2 = F_2. \quad (8,2)$$

$$q = p_1 - p_2, \quad P = p_1 + p_2 \quad (8,3)$$

эквивалентность которых легко устанавливается с помощью уравнения Дирака.

Если  $p_1 \approx p_2$ , то из (8,1) получается следующее выражение для тока, порождающего фотоны

$$j_\mu = ie G_1(0) \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1. \quad (8,4)$$

Как известно, /см. например книгу В.Паули "Общие принципы волновой механики"/ отсюда вытекает, что магнитный момент равен

$$\mu = \frac{e}{2m} G_1(0) = \mu_B (1 + 2m F_2(0)). \quad (8,5)$$

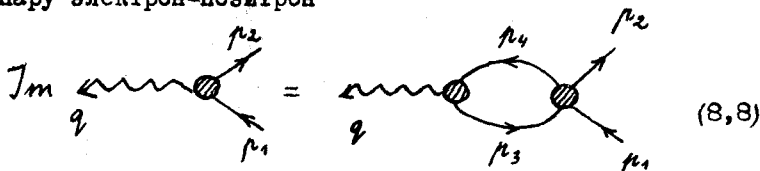
Это означает, что магнитный момент электрона, вообще говоря, не равен боровскому магнетону  $\mu_B = e/2m$ , а отклоняется от него на  $2m F_2(0)$ . Величину этого дополнительного магнитного момента можно вычислить с помощью дисперсионного соотношения

$$F_2(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} F_2(z) dz}{z - q^2}, \quad (8,6)$$

что приводит к формуле

$$\Delta\mu/\mu_B = \frac{2m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } F_2(z) dz}{z}. \quad (8,7)$$

Чтобы найти  $\text{Im } F_2$ , воспользуемся унитарностью по переменной  $q^2$ . Мы ограничимся при этом учетом простейшего промежуточного состояния, содержащего пару электрон-позитрон



$$\text{Im} \quad (8,8)$$

Согласно закону сохранения энергии должно быть  $q^2 \leq -4m^2$ . Поэтому

$$\text{Im } F_2(z) \neq 0, \quad -\infty < z \leq -4m^2. \quad (8,9)$$

Для вычисления необходимо знать матричный элемент рассеяния двух электронов. Возьмем его сначала в общем виде

$$M = \sum_{k=1}^5 M_k(\bar{u}_4 o_k u_3)(\bar{u}_2 o_k u_1). \quad (8,10)$$

Тогда

$$\text{Im } j_\mu = \frac{(2\pi)^4}{2} \int \frac{d\vec{p}_3 d\vec{p}_4}{(2\pi)^6} \sum_{\text{пол.}} ie(\bar{u}_3 \gamma_\mu u_4) M \delta(q + p_3 - p_4) \frac{m^2}{\epsilon_3 \epsilon_4}. \quad (8,11)$$

Здесь мы вместо точного  $j_\mu$  подставили под интегралом лишь первое приближение, так как в противном случае получилось бы интегральное уравнение относительно  $G_{1,2}$ . Подставив  $M$  из (8,10), находим

$$y_m j_\mu = \frac{ie}{\pi^2} \sum_k (\bar{u}_2 o_k u_1) \int d\Gamma M_k S_F j_\mu (-i\hat{p}_4 + m) o_k (-i\hat{p}_3 + m), \quad (8,12)$$

$$d\Gamma = \frac{d\vec{p}_3}{2\epsilon_3} \frac{d\vec{p}_4}{2\epsilon_4} \delta^4(q + p_3 - p_4). \quad (8,13)$$

Вычислим необходимые шпурн:

$$S) S_\mu \gamma_\mu (-i\hat{r}_4 + m)(-i\hat{r}_3 + m) = -4im(r_3 + r_4)_\mu$$

$$V) S_\mu \gamma_\mu (-i\hat{r}_4 + m)\gamma_\nu (-i\hat{r}_3 + m) = -4[r_{3\mu}r_{4\nu} + r_{3\nu}r_{4\mu} - \delta_{\mu\nu}(r_3 r_4 \cdot m^2)]$$

$$T) S_\mu \gamma_\mu (-i\hat{r}_4 + m)\gamma_5 \sigma(-i\hat{r}_3 + m) = 4mq_\sigma \delta_{\mu\sigma} \quad (8,14)$$

$$A) S_\mu \gamma_\mu (-i\hat{r}_4 + m)i\gamma_5 \gamma_\nu (-i\hat{r}_3 + m) = 4ie_{\nu\mu\sigma} r_{3\sigma} r_{4\sigma}$$

$$P) S_\mu \gamma_\mu (-i\hat{r}_4 + m)\gamma_5 (-i\hat{r}_3 + m) = 0$$

Таким образом,

$$U_m j_\mu = \frac{ie}{2\pi^2} \bar{u}_2 \left\{ -im \int d\Omega_3 d\Gamma (r_3 + r_4)_\mu - \gamma_\nu \int d\Omega_3 d\Gamma r_{3\mu} r_{4\nu} + r_{3\nu} r_{4\mu} + \right. \quad (8,15) \\ \left. + \frac{q^2}{2} \delta_{\mu\nu} \right\} + m \gamma_\mu \gamma_\nu q_\nu \int d\Omega_4 d\Gamma - \gamma_5 \gamma_\nu e_{\nu\mu\sigma} \int d\Omega_4 d\Gamma r_{3\sigma} r_{4\sigma} \Big\} u_1.$$

Наша задача состоит теперь в том, чтобы привести это выражение к виду

$$J_m j_\mu = ie \bar{u}_2 (g_1 \gamma_\mu + ig_2 P_\mu) u_1, \quad (8,16)$$

из которого можно заключить, что

$$g_2 = J_m b_2 \quad (8,17)$$

и найти по формуле (8,7) дополнительный магнитный момент.

Для того, чтобы осуществить это приведение практически, необходимо вычислить входящие в (8,15) интегралы

$$J_\mu = \int d\Omega d\Gamma (r_3 + r_4)_\mu, \quad J_{\mu\nu}^{(\pm)} = \int d\Omega d\Gamma (r_{3\mu} r_{4\nu} \pm r_{3\nu} r_{4\mu}). \quad (8,18)$$

Введем вместо  $r_3$  и  $r_4$  два других независимых вектора

$$q = r_4 - r_3, \quad P = r_4 + r_3, \quad q \cdot P = 0 \quad (8,19)$$

Тогда

$$J_{\mu} = \int M d\Gamma P_{\mu}, \quad (8,20a)$$

$$J_{\mu\nu}^{(-)} = \frac{1}{2} \int M d\Gamma (q_{\nu} P_{\mu} - q_{\mu} P_{\nu}) = \frac{1}{2} (q_{\nu} J_{\mu} - q_{\mu} J_{\nu}), \quad (8,20б)$$

$$J_{\mu\nu}^{(+)} = \frac{1}{2} \int M d\Gamma (P_{\mu} P_{\nu} - q_{\mu} q_{\nu}), \quad (8,20в)$$

то есть достаточно вычислить только  $J_{\mu}$  и  $J_{\mu\nu}^{(+)}$ . Оба эти интеграла зависят от векторов  $p_1$  и  $p_2$ , как от параметров. Удобно и здесь оперировать не с  $p_{1,2}$ , а с

$$q = p_1 - p_2, \quad P = p_1 + p_2, \quad q \cdot P = 0 \quad (8,21)$$

Ясно, что, вообще говоря,

$$J_{\mu} = B P_{\mu} + B' q_{\mu},$$

но — так как  $q \cdot P = 0$  — то  $B' = 0$ . Поэтому

$$J_{\mu} = B P_{\mu}, \quad B = \frac{1}{P^2} \int M d\Gamma (P \cdot P). \quad (8,22)$$

$$J_{\mu\nu}^{(+)} = \frac{B}{2} (q_{\nu} P_{\mu} - q_{\mu} P_{\nu}). \quad (8,23)$$

Из тех же соображений

$$\int M d\Gamma P_{\mu} P_{\nu} = C (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) + D P_{\mu} P_{\nu}, \quad (8,24)$$

откуда вытекает, что

$$C = \frac{1}{2q^2 P^2} \int M d\Gamma (P^2 P^2 - (P \cdot P)^2), \quad D = \frac{1}{2P^4} \int M d\Gamma (P^2 P^2 - 3(P \cdot P)^2). \quad (8,25)$$

Обозначив для краткости

$$E = \int M d\Gamma, \quad (8,26)$$

мы имеем

$$Y_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{C}{2} (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) + \frac{\mathcal{D}}{2} P_\mu P_\nu - \frac{E}{2} q_\mu q_\nu. \quad (8,27)$$

Подставив найденные выражения в 8,15, найдем

$$Y_{mj} = \frac{i}{2\pi^2} \bar{u}_2 \left\{ -im B_s P_\mu - \gamma_\nu \left[ \frac{1}{2} C_V (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) - \frac{1}{2} \mathcal{D}_V P_\mu P_\nu - \right. \right. \quad (8,28)$$

$\left. - \frac{1}{2} E_V q_\mu q_\nu + \frac{1}{2} E_V q^2 \delta_{\mu\nu} \right] + m \gamma_{\mu\nu} q_\nu E_T - \gamma_s \gamma_{\nu\mu} q_\nu \frac{B_A}{4} (q_s P_\mu - q_\mu P_s) \left. \right\} u_1$   
 /обозначение  $E_V$  означает, что в формулу (8,26) под интеграл входит  $M_V$ ; аналогичный смысл имеют эти индексы и в других случаях/.

Выражение (8,28) значительно упрощается с помощью уравнения Дирака

$$\bar{u}_2 \hat{q} u_1 = 0, \quad \bar{u}_2 \hat{P} u_1 = 2im \bar{u}_2 u_1,$$

$$\bar{u}_2 \gamma_{\mu\nu} q_\nu u_1 = \bar{u}_2 (2m \gamma_\mu + i P_\mu) u_1, \quad (8,29)$$

$$\bar{u}_2 \gamma_s \gamma_{\nu\mu} q_\nu q_\mu u_1 = \bar{u}_2 (2im P_\mu - P_\mu^2 \gamma_\mu) u_1,$$

в результате чего получается

$$Y_{mj} = \frac{ie}{2\pi^2} \bar{u}_2 \left\{ -im B_s P_\mu - \frac{1}{2} q^2 \gamma_\mu (C_V + E_V) - im \mathcal{D}_V P_\mu + \right. \quad (8,30)$$

$$\left. + m E_T (2m \gamma_\mu + i P_\mu) + \frac{1}{2} B_A (2im P_\mu - P_\mu^2 \gamma_\mu) \right\} u_1.$$

Сравнивая с (8,16), находим

$$g_1 = \frac{1}{2\pi^2} \left[ -\frac{q^2}{2} (C_V + E_V) + 2m^2 E_T - \frac{P^2}{2} B_A \right]. \quad (8,31)$$

$$g_2 = \frac{m}{2\pi^2} \left[ -B_s - \mathcal{D}_V + E_T + B_A \right]. \quad (8,32)$$

Подставив вместо  $B, C, D, E$  их интегральные выражения, имеем

$$g_2 = -\frac{m}{2\pi^2} \int d\Gamma \left\{ M_S \frac{P \cdot P}{P^2} - M_V \frac{P^2 P^2 - 3(P \cdot P)^2}{2P^4} - M_T - M_A \frac{P \cdot P}{P^2} \right\}. \quad (8,33)$$

Учитывая, что  $M_k$  зависят от  $q^2 = (p_1 - p_2)^2$  и  $v = (p_1 - p_4)^2$ , преобразуем (8,33) к этим переменным

$$P^2 = P^2 = -q^2 - 4m^2, \quad v = \frac{1}{4}(P \cdot P)^2 = \frac{1}{2}(P^2 - P \cdot P). \quad (8,34)$$

Итак,

$$g_2 = -\frac{m}{2\pi^2} \int d\Gamma \left\{ \left(1 - \frac{2v}{P^2}\right) (M_S - M_A) + M_V \left(1 - \frac{6v}{P^2} + \frac{6v^2}{P^4}\right) - M_T \right\}. \quad (8,35)$$

Напомним, что эта формула является совершенно общей и для ее применения необходимо только знать конкретный вид  $M_k$ . С точностью  $\sim e^2$  матричный элемент  $e-e$  рассеяния имеет вид, указанный Мёллером

$$M = e^2 \left\{ \frac{\bar{u}_4 \gamma_\mu u_3 \cdot \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1}{(p_1 - p_2)^2} - \frac{\bar{u}_2 \gamma_\mu u_3 \cdot \bar{u}_4 \gamma_\mu u_1}{(p_1 - p_4)^2} \right\}, \quad (8,36)$$

откуда следует, что

$$M_S = -\frac{e^2}{v}, \quad M_V = e^2 \left( \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2v} \right), \quad M_T = 0, \quad M_A = -\frac{e^2}{2v}. \quad (8,37)$$

Воспользовавшись этими выражениями, мы можем вычислить поправку к магнитному моменту в приближении  $\sim e^2$ :

$$g_2 = -\frac{me^2}{2\pi^2} \int d\Gamma \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{P^2} + v \left( \frac{3}{P^4} - \frac{6}{P^2 q^2} \right) + \frac{6v^2}{q^2 P^4} \right\}.$$

Легко убедиться, что

$$\int v d\Gamma = \frac{P^2}{2} I, \quad \int v^2 d\Gamma = \frac{P^4}{3} I, \quad I = \int d\Gamma = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2}} \quad (8,38)$$



и потому

$$g_2 = \frac{me^2}{4\pi^2 \rho_2} I = \frac{m\alpha}{2 \sqrt{q^2(q^2 + 4m^2)}} \quad (8,39)$$

/здесь  $\alpha = e^2/4\pi$  - постоянная тонкой структуры/.

В соответствии с (8,7)

$$\Delta\mu/\mu_B = \frac{\alpha m^2}{\pi} \int_{-\infty}^{-4m^2} \frac{dz}{z \sqrt{z(z+4m^2)}} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (8,40)$$

Этот результат впервые был получен Швингером путем перенормировки расходящихся интегралов в высших приближениях квантовой электродинамики. В рамках дисперсионной теории мы не встречаемся с расходимостями, поэтому она - эта методика - представляет существенный шаг вперед по сравнению с теорией Швингера-Фейнмана.

### III глава. ЯДЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В предыдущей главе мы рассматривали взаимодействие заряженных частиц между собой и с фотонами. В отличие от этого при рассмотрении ядерных взаимодействий электрические свойства, как правило, несущественны. Действительно, основной причиной соединения заряженных протонов и нейтральных нейтронов ядра могут быть силы только незлектромагнитного происхождения.

Таким образом, ядерное взаимодействие качественно отличается от электромагнитного. Это означает, что оно обусловлено совершенно иным полем. Ядерное поле впервые было проквантовано Х.Юкавой. Он показал, что кванты этого поля должны иметь массу  $\sim 200 m_e$ . Несколько позже частицы с близкой к этой величине массой были обнаружены Андерсоном и Неддермайером в космических лучах и названы мезонами. Это открытие дало мощный толчок развитию мезонной теории ядерных сил, которая строилась по аналогии с квантовой электродинамикой /хорошим образом является книга Г.Вентцеля [27] /.

Очень скоро выяснилось, что эта теория плохо согласуется с экспериментом. Накоплялись и трудности другого рода: оказалось, например, что мезон космических лучей плохо взаимодействует с ядрами [28], хотя он по идее Юкавы является носителем ядерных сил.

Клубок загадок был распустан в 1943 г. С.Пауэллом, показавшим, что ядерный мезон действительно существует, но отличается от открытого Андерсоном. Обе частицы были названы мезонами -  $\pi$ - и  $\mu$ -соответственно.

Вскоре после открытия Пауэлла мезоны были получены искусственно на ускорителях. В настоящее время

известны следующие характеристики  $\pi$ -мезонов

$$M_{\pi} = 140 \text{ МэВ}, \quad S = 0, \quad P = -1$$

Отрицательная четность и нулевой спин означают, что  $\pi$ -мезон описывается псевдоскалярным полем.

Характерным свойством  $\pi$ -мезонов является то, что их существует три вида:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ . Поэтому отличны от нуля следующие матричные элементы

$$\langle n\pi^+ | p \rangle, \quad \langle p\pi^- | n \rangle, \quad \langle p\pi^0 | p \rangle, \quad \langle n\pi^0 | n \rangle.$$

Таким образом, процесс ядерного взаимодействия связан с превращением протона в нейтрон и обратно. Это вынуждает нас рассматривать протон и нейтрон как одну и ту же частицу /нуклон/ в двух состояниях. Аналогично, три пиона являются тремя возможными состояниями одной частицы. Различия между протоном и нейтроном или между  $\pi$ -мезонами являются несущественными в ядерных взаимодействиях.

Совокупность частиц, обладающих одинаковыми ядерными свойствами, образует так называемый изотопический мультиплет.

## § 9. Изотопический спин /пионы и нуклоны/

Объединение частиц в изотопические мультиплеты означает, что вводится единая полевая функция с несколькими компонентами, каждая для конкретного вида частицы. Например, для нуклона

$$U = \begin{pmatrix} u_p \\ u_n \end{pmatrix} \quad (9,1)$$

и для пиона

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \\ \varphi_- \end{pmatrix}. \quad (9,2)$$

Конечно, само по себе такое объединение никакого физического смысла не содержит. Физическим выражением ядерной эквивалентности протона и нейтрона или трех пионов является не это, а возможность пользоваться как функцией  $U$  из (9,1), так и любой другой, полученной из нее посредством унитарного преобразования

$$U' = S U S^+ . \quad (9,3)$$

Законы ядерного взаимодействия должны оставаться при этом неизменными. Если бы мы произвольно свели в одну многокомпонентную величину полевые функции различных частиц, то это свойство не имело бы места.

Унитарному преобразованию (9,3) должны подвергаться изотопические функции всех частиц одновременно. Действительно, рассмотрим преобразование зарядовой симметрии

$$p \rightleftharpoons n . \quad (9,4)$$

Согласно закону сохранения заряда протон может испускать только  $\pi^{+,0}$ -мезоны, а нейтрон - только  $\pi^{-,0}$ . Поэтому преобразование (9,4) следует сопровождать заменой

$$\pi^+ \rightleftharpoons \pi^- , \quad \pi^0 \rightarrow \pi^0 . \quad (9,5)$$

Если нуклон может взаимодействовать через ядерные силы с какими-либо другими частицами, то и для них также необходимо производить преобразование их полевых функций одновременно с заменой (9,4).

На этом примере мы убеждаемся в том, что изотопические преобразования производятся над всей совокупностью сильно взаимодействующих частиц. В этом смысле они аналогичны таким преобразованиям, как повороты системы координат в пространстве, которые совершаются сразу над всеми частицами, поскольку

пространство-время едино для всех частиц.

Для характеристики изотопических преобразований вводится так называемое изотопическое пространство, в котором полевые функции рассматриваются как соответствующие геометрические величины. Полевая функция пиона есть вектор, а нуклона - спинор в 3-мерном изотопическом пространстве.

Матричные элементы испускания мезона записываются в едином виде

$$\langle \tau \beta / \alpha \rangle, \quad (9,6)$$

где указаны только изотопические индексы:  $\alpha$  и  $\beta$  - нуклона до и после излучения,  $\tau$  - излученного мезона. При изотопических вращениях матричный элемент (9,6) испытывает сложное преобразование: по индексам  $\alpha$  и  $\beta$  он преобразуется как спинор, а по индексу  $\tau$  - как вектор.

Чтобы построить такую величину из спиноров нуклона, необходимо иметь 2-рядные матрицы, действующие на этот спинор. Таких линейно-независимых унитарных матриц всего 4. Мы возьмем их в виде

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9,7)$$

совпадающем с известными спиновыми матрицами Паули.

Для них имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \tau_i \tau_k + \tau_k \tau_i &= 2\delta_{ik} \\ \tau_n \tau_s &= ie_{nsn} \tau_n + \delta_{ns} \end{aligned} \quad (9,8)$$

$e_{nsn}$  - полностью антисимметричный тензор 3-го ранга,  $e_{123} = +1$ .

Поскольку при поворотах системы координат три матрицы  $\tau_n$  преобразуются друг через друга как вектор, то величина

$$\bar{u}_\beta \tau u_\alpha \quad (9,9)$$

обладает как раз такими свойствами, как матричный элемент (9,6). Если учесть еще, что спиноры  $u_\alpha$  содержит зависимость от импульсов, а матричный элемент должен выражать пространственные свойства мезонов и нуклонов, то есть быть спинором по нуклонам и псевдоскаляром относительно мезона, то станет ясно, что в (9,9) следует ввести матрицу, составленную из  $\gamma_\mu$ , которая бы не изменялась при пространственных вращениях, но обращала бы знак при пространственных отражениях. Легко убедиться, что такой матрицей является

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_5^* \quad (9,10)$$

Таким образом,

$$\langle r\beta | \alpha \rangle = i g_r \bar{u}_\beta \tau_r \gamma_5 u_\alpha \sqrt{\frac{M^2}{2\omega e_1 e_2}} \quad (9,11)$$

Множитель  $i$  введен для того, чтобы матричный элемент был эрмитовым при вещественной  $g_r$ .  $\sqrt{M^2/2\omega e_1 e_2}$  появляется вследствие нашего выбора нормировки /см. §3/. В (9,11) не указаны явно импульсы и поляризации частиц. Величина  $g_r$  вообще говоря является функцией

$$g_r((p_1 - p_2)^2) = g_r(q^2), \quad (9,12)$$

но, если речь идет об испускании реальных мезонов, для которых  $q^2 = -\mu^2$ , то  $g_r$  сводится к постоянной. При испускании виртуальных мезонов константу  $g_r$  следует умножать на форм-фактор нуклона  $F(q^2)$ .

Чтобы из (9,11) получить матричный элемент испускания  $\pi^+$ , необходимо заменить в этой формуле  $\tau_r$  на /см. прил. Д/

$$\tau_- = \frac{\tau_1 - i\tau_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9,13)$$

В этом случае

$$\bar{u} \tau_- u = \sqrt{2} \bar{u}_n u_p,$$

что и требуется. Испусканию  $\pi^-$  соответствует введение матрицы

$$\tau_+ = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9,14)$$

Преобразование зарядовой симметрии (9,4-5) осуществляется унитарной матрицей

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1. \quad (9,15)$$

При этом

$$\tau^+ \rightleftharpoons \tau^- \quad (9,16)$$

и матричный элемент (9,11) остается инвариантным, если  $g_1 = g_2$ . Что касается  $g_3$ , то о ней ничего нельзя сказать на основании зарядовой симметрии.

Если

$$g_1 = g_2 = g_3 = g, \quad (9,17)$$

то матричный элемент (9,11) инвариантен относительно любых унитарных преобразований. Это свойство называется изотопической инвариантностью. Оно характеризует ядерное равноправие всех трех пионов, а не только заряженных.

Рассмотрим связь между изотопической инвариантностью и сохранением электрического заряда. Сохранение заряда является следствием инвариантности относительно калибровочного преобразования

$$u_p \rightarrow e^{2i\alpha} u_p, \quad u_n \rightarrow u_n \quad (9,18)$$

с произвольной вещественной  $\alpha$ . Это преобразование можно записать в виде (9,3), полагая

$$S = e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9,19)$$

Первое слагаемое преобразует протонную компоненту, второе - оставляет неизменной нейтронную.

$$S = e^{2i\alpha} \frac{1+\varepsilon_3}{2} + \frac{1-\varepsilon_3}{2} = \frac{1}{2}(e^{2i\alpha}+1) + \frac{1}{2}(e^{2i\alpha}-1)\varepsilon_3 = \\ = e^{i\alpha} (\cos\alpha + i\varepsilon_3 \sin\alpha). \quad (9,20)$$

Эта матрица соответствует повороту на угол  $\alpha$  вокруг третьей оси изотопического пространства. Инвариантность относительно этого преобразования имеет место всегда, вследствие закона сохранения заряда.

Изотопическая инвариантность, т.е. инвариантность относительно поворотов вокруг любой /а не только третьей/ оси, нарушается, если учесть, что массы протона и нейтрона или трех пионов не совпадают. Нарушается она также и в тех случаях, когда существенную роль в процессе играют электромагнитные силы, явным образом нарушающие симметрию  $p, n$  или  $\pi^{\pm,0}$ .

Наглядная интерпретация полевых функций  $\mathcal{U}, \Phi$  состоит в том, что нуклону приписывается вектор  $\vec{T}_N$ , имеющий квантованную проекцию  $T_2^N = \pm 1/2$ , а мезону - вектор  $\vec{T}_\pi$ , квантованный на три проекции  $T_2^\pi = \pm 1, 0$ . Сохранение заряда означает, что сумма проекций этих векторов не изменяется. Изотопическая инвариантность утверждает, что сохраняется любая проекция, т.е. и сам вектор

$$\vec{T} = \vec{T}_N + \vec{T}_\pi. \quad (9,21)$$

Этот вектор называется изотопическим спином. Изо-спины складываются квантовомеханически: система пиона и нуклона с изо-спинами 1 и 1/2 может находиться в состояниях с изо-спинами 1/2 и 3/2.

В заключение напомним вектор состояния, содержащего один нуклон и один пион

$$\Phi = \sum_{\alpha, s} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_\pi(\vec{q})}{\sqrt{2\omega}} \tau_N \gamma_5 u_{\alpha s}(\vec{p}) \sqrt{\frac{\mu}{E}} C_\pi(\vec{p}, \vec{q}) \quad (9,22)$$



$$\omega = +\sqrt{\vec{q}^2 + \mu^2}, \quad \varepsilon = +\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}.$$

Здесь  $\varphi_\pi$  - решение уравнения Клейна-Гордона, описывающее мезон с массой  $\mu$  и проекцией изо-спина  $\pi$ ,  $u_{\alpha s}$  - решение уравнения Дирака для нуклона с массой  $M$ , проекцией изо-спина  $\alpha$  и поляризацией  $s$ .  $C_2^{\alpha s}$  - волновая функция пиона и нуклона с соответствующими квантовыми числами.

## § 10. Структура амплитуды $\pi N$ рассеяния

Матрица рассеяния пиона на нуклоне может быть представлена с помощью (9,22) в виде

$$S_{\pi N} = \sum_{k\ell} \sum_{\alpha\beta} \sum_{ss'} \int \frac{d\vec{p}_1 d\vec{q}_1 d\vec{p}_2 d\vec{q}_2}{(2\pi)^{12}} \sqrt{\frac{M^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega_1 \omega_2}} \varphi_\pi(\vec{q}_2) \varphi_N(\vec{q}_1) \cdot \bar{u}_{\beta s'}(\vec{p}_2) S_{k\ell}^{\alpha\beta, ss'}(\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_2) u_{\alpha s}(\vec{p}_1). \quad (10,1)$$

В этой сумме содержатся слагаемые, соответствующие рассеянию всех сортов пионов /нумеруются индексами  $k, \ell$ ;  $k$  - падающий,  $\ell$  - рассеянный пион/ на любом виде нуклона /отличаются индексами изо-спина  $\alpha, \beta$  и поляризации  $s, s'$ / с любыми начальными  $(\vec{p}_1, \vec{q}_1)$  и конечными  $(\vec{p}_2, \vec{q}_2)$  импульсами. Если какие-либо из этих квантовых чисел задаются, то из суммы следует оставить только соответствующие слагаемые. Если же они не фиксируются, то в соответствии с (10,1), по ним следует суммировать /или усреднять/.

Функция  $S_{k\ell}^{\alpha\beta, ss'}(\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_2)$  является матричным элементом матрицы рассеяния, когда начальное и конечное состояния имеют заданные импульсы, изо-спины и поляризации. Некоторые сведения о строении этой функции дают требования инвариантности относительно различных преобразований.

Первое требование - инвариантность относительно сдвигов начала 4-мерной системы координат - позволяет утверждать, что сохраняется 4-мерный импульс, т.е.  $S$  - матрица диагональна по полному импульсу. Благодаря этому

$$S_{\kappa\epsilon}^{\alpha\beta, ss'} (p_1 q_1 p_2 q_2) = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) M_{\kappa\epsilon}^{\alpha\beta, ss'} \quad (10,2)$$

Второе требование - инвариантность относительно лоренцовских вращений 4-мерной системы координат - означает, что амплитуда  $M$  зависит только от скалярных произведений 4-мерных векторов, так как только они являются инвариантами этих преобразований. Из импульсов можно составить три инварианта Мандельштама

$$s = -(p_1 + q_1)^2, \quad t = -(p_1 - p_2)^2, \quad u = -(p_1 - q_2)^2. \quad (10,3)$$

или любую другую комбинацию. С помощью матриц  $\gamma_\mu$  можно образовать инвариант  $\bar{\psi} \cdot Q$ , где  $Q$  - линейная комбинация всех импульсов, которую мы конкретизируем позже.

Итак,

$$M = A + i\bar{\psi} \cdot Q B \quad (10,4)$$

причем  $A, B$  зависят от изоспина и  $s, t, u$ .

Третье требование - изотопическая инвариантность - означает, что  $M$  является тензором второго ранга по индексам  $\kappa, \epsilon$ . Общий вид такого тензора

$$a\delta_{\kappa\epsilon} + b\tau_\kappa\tau_\epsilon + c\tau_\epsilon\tau_\kappa$$

с помощью правил коммутации (9,8) приводится к более удобному

$$A = A^{(+)} \delta_{\kappa\epsilon} + A^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_\epsilon\tau_\kappa - \tau_\kappa\tau_\epsilon]. \quad (10,5)$$

$$B = B^{(+)} \delta_{\kappa\epsilon} + B^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_\epsilon\tau_\kappa - \tau_\kappa\tau_\epsilon]. \quad (10,6)$$

Таким образом, лоренцовская и изотопическая инвариантности позволяют свести амплитуду рассеяния к виду (10,4-6). Четыре амплитуды  $A^{(k)}, B^{(k)}$  описывают всю совокупность процессов  $\pi N$ -рассеяния, а их аналитические продолжения позволяют также рассмотреть  $\pi \bar{N}$ - и  $N \bar{N}$ -взаимодействия.

Физический смысл амплитуд  $A^{(k)}$  прост:  $A^{(k)}$  есть амплитуда обычного ( $k=l$ ) рассеяния, а  $A^{(c)}$  - обменного рассеяния ( $k \neq l$ ). Аналогично,  $A$  относится к рассеянию без изменения поляризации нуклона, а  $B$  - к рассеянию с изменением таковой /так называемое "спин-флип" рассеяние/. В дальнейшем эти 4 амплитуды мы будем называть дисперсионными, в отличие от изотопических и физических амплитуд, связь с которыми рассмотрена в прил. Г.

Четвертое свойство амплитуды, которое мы рассмотрим, является не столь общим, как три предыдущих, но не менее важным. Оно фиксирует поведение  $M$  при преобразованиях

$$k \rightleftharpoons l, \quad q_1 \rightleftharpoons -q_2. \quad (10,7)$$

При этом фактор  $\varphi_k^*(\vec{q}_2) \varphi_k(\vec{q}_1)$  переходит в сопряженную себе величину, благодаря чему матричный элемент  $S_{kl}(q_1, q_2)$  обладает свойством

$$S_{kl}(q_1, q_2) = S_{lk}^*(-q_2, -q_1), \quad (10,8)$$

которое называется перекрестной /кросс/ симметрией. Чтобы фиксировать кросс-свойства дисперсионных амплитуд  $A^{(k)}, B^{(k)}$ , необходимо задать вектор  $Q$ . Хотя  $Q$  и может, вообще говоря, содержать  $\mu_1, \mu_2$ , но, благодаря уравнениям Дирака

$$(i\gamma \cdot \mu_1 + M) u_{\alpha s}(\mu_1) = 0, \quad \bar{u}_{\beta s'}(\mu_2)(i\gamma \cdot \mu_2 + M) = 0, \quad (10,9)$$

эти слагаемые могут быть исключены. Более того, записав произвольную линейную комбинацию  $q_1$  и  $q_2$  в виде

$$aq_1 + bq_2 = (a+b) \frac{q_1 + q_2}{2} + (a-b) \frac{q_1 - q_2}{2}$$

и воспользовавшись сохранением импульса, мы можем исключить второе слагаемое, применив опять уравнение Дирака. Поэтому в совершенно общем виде можно положить

$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2}. \quad (10,10)$$

При кросс-преобразовании

$$Q \rightarrow -Q, \quad \delta_{\kappa\epsilon} \rightarrow \delta_{\kappa\epsilon}, \quad [\tau_\epsilon, \tau_\kappa] \rightarrow -[\tau_\epsilon, \tau_\kappa], \quad (10,11)$$

так что перекрестная инвариантность матрицы рассеяния приводит к уравнениям

$$A^{(\kappa)} = (\hat{A}^{(\kappa)})^{\alpha}, \quad A^{(\epsilon)} = -(\hat{A}^{(\epsilon)})^{\alpha}, \quad B^{(\kappa)} = (\hat{B}^{(\kappa)})^{\alpha}, \quad B^{(\epsilon)} = (\hat{B}^{(\epsilon)})^{\alpha}, \quad (10,12)$$

причем аргументы амплитуд в правой части должны быть также подтверждены преобразованием (10,7). Для переменных Мандельштама это значит, что

$$s \rightarrow u, \quad t \rightarrow t, \quad u \rightarrow s. \quad (10,13)$$

Рассмотренная здесь редукция матрицы рассеяния с помощью общих требований может служить образцом для аналогичных упрощений в других задачах.

## §11. Рассеяние вперед. Ядерная константа связи

Чтобы написать дисперсионное соотношение, необходимо, прежде всего, выбрать кинематические переменные. Выше уже неоднократно отмечалось, что в задачах о рассеянии имеется только две независимые переменные. К сожалению, переменные Мандельштама  $s, t, u$  неудобны,

потому что условие перекрестной симметрии выражается в них очень сложно, например

$$\left(A^{(\pm)}(s, t)\right)^{cr} = \tilde{A}^{(\pm)}(2M^2 + 2\mu^2 - s - t, t). \quad (11.1)$$

Мы выберем переменные, предложенные в работе Чу, Голдбергера, Лоу и Намбу [29]

$$\nu = -\frac{P \cdot Q}{M}, \quad q^2 = (q_1 - q_2)^2, \quad P = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad Q = \frac{q_1 + q_2}{2}. \quad (11.2)$$

Их достоинство состоит как раз в простой форме условия перекрестной симметрии. Например,

$$\left[A^{(\pm)}(\nu, q^2)\right]^{cr} = \tilde{A}^{(\pm)}(-\nu, q^2), \quad (11.3)$$

т.е.  $\text{Re } A^{(\pm)} / \text{Re } B^{(\pm)}$  является четной функцией  $\nu$ . Наоборот,  $\text{Re } A^{(\pm)}$  и  $\text{Re } B^{(\pm)}$  оказываются нечетными функциями  $\nu$ .

Дисперсионные соотношения, выражающие аналитический характер  $A^{(\pm)}$ ,  $B^{(\pm)}$  имеют вид

$$A^{(\pm)}(\nu, q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } A^{(\pm)}(\nu', q^2) d\nu'}{\nu' - \nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im } A^{(\pm)}(\nu', q^2) \left( \frac{1}{\nu' - \nu} \pm \frac{1}{\nu' + \nu} \right) d\nu'. \quad (11.4)$$

$$B^{(\pm)}(\nu, q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im } B^{(\pm)}(\nu', q^2) \left( \frac{1}{\nu' - \nu} \mp \frac{1}{\nu' + \nu} \right) d\nu'. \quad (11.5)$$

В этом параграфе мы рассмотрим следствия, которые вытекают из этих уравнений в том случае, когда происходит рассеяние вперед. При этом

$$q_1 = q_2, \quad p_1 = p_2, \quad q^2 = 0, \quad \nu = -\frac{p_1 \cdot q_1}{M} = \omega, \quad (11.6)$$

где  $\omega$  — энергия мезона в л.с. Дисперсионное соотношение для  $M^{(\pm)} = A^{(\pm)} + i\gamma Q B^{(\pm)}$  сводится к виду

$$M^{(\pm)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} M^{(\pm)}(\omega') \left( \frac{1}{\omega' - \omega} \pm \frac{1}{\omega' + \omega} \right) d\omega', \quad (11.7)$$

так как  $\bar{u}(p)M^{(\pm)}u(p) = A^{(\pm)} + \omega B^{(\pm)}$ . При вычислении  $\text{Im} M$  из соотношения унитарности

$$\text{Im} M = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_n \langle p_2 q_2 | n \rangle^* \langle n | p_1 q_1 \rangle \delta^4(p_1 + q_1 - p_2) \quad (11.8)$$

разобьем  $\sum_n$  на две части: в одну отнесем только одно-частичные состояния, в другую все остальные.

В качестве одно-частичных состояний в данном случае могут фигурировать только состояния, содержащие один нуклон. Многочастичные состояния будут содержать, кроме нуклона, еще и другие частицы, самой легкой из которых является пион, так что для них

$$-p_n^2 \geq (M + \mu)^2$$

Отсюда вытекает, что  $\text{Im} M_{\pm} \neq 0$  лишь при  $\omega \geq \mu$ . Поэтому

$$M^{(\pm)}(\omega) = M_1^{(\pm)}(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \text{Im} M^{(\pm)}(\omega') \left( \frac{1}{\omega' - \omega} \pm \frac{1}{\omega' + \omega} \right) d\omega'. \quad (11.9)$$

Здесь через  $M_1^{(\pm)}$  мы обозначили вклад в амплитуду от одночастичных состояний, который будет вычислен ниже. В области  $\omega \geq \mu$  одночастичные состояния не дают вклада.

Поскольку в (11.9) под интеграл входит  $\text{Im} M(\omega)$  при  $\omega \geq \mu$ , то можно воспользоваться оптической теоремой, для чего следует сначала выразить  $M^{(\pm)}$  через физические амплитуды

$$M^{\pm} = \frac{M(\pi^- p) \pm M(\pi^+ p)}{2} \quad (11.10)$$

Согласно оптической теореме (2.26)

$$\begin{aligned} \text{Im} M^{(\pm)}(\omega) &= \frac{i}{8\pi} q (\sigma_{\pi^- p} \pm \sigma_{\pi^+ p}), \\ q &= \sqrt{\omega^2 - \mu^2}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

После подстановки выражения (11,11) в (11,9) получаются дисперсионные соотношения для рассеяния заряженных мезонов, впервые выведенные в работе Голдбергера, Миязава, Эме [30]. Мы рассмотрим одно из них

$$\operatorname{Re} M^{(\pm)}(\omega) = \operatorname{Re} M_1^{(\pm)}(\omega) + \frac{\omega}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} q' \frac{\sigma_{\pm} - \sigma_{\mp}}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (11,12)$$

с целью найти из него одночастичный вклад  $\operatorname{Re} M_1^{(\pm)}$  и сравнить его с теоретическим значением. Положим  $\omega = \mu$  и воспользуемся экспериментальными данными о величине  $\operatorname{Re} M^{(\pm)}$  и зависимости  $\sigma_{\pm}(\omega)$  /см. [31] и рис.15/

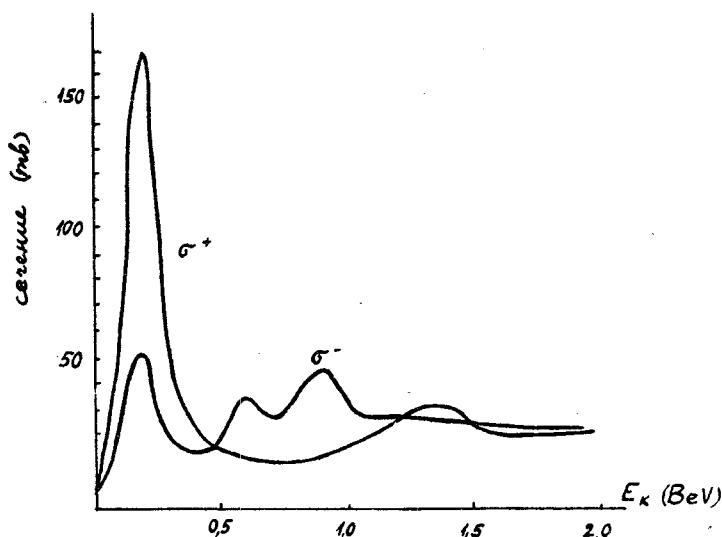


Рис. 15

$$\operatorname{Re} M^{(\pm)}(\mu) = \frac{1}{2} (a^{-} - a^{+}) = 4\pi \frac{0.09}{\mu}. \quad (11,13)$$

Дисперсионный интеграл (11,12) сходится, если

$$\sigma_-(\omega) \rightarrow \sigma_+(\omega), \quad \omega \rightarrow \infty \quad (11,14)$$

Померанчук показал [16], что это равенство является теоретическим следствием из того обстоятельства, что оба сечения становятся постоянными при достаточно больших энергиях. Небольшая модификация его рассуждений [32] позволяет доказать, что интеграл в уравнении (11,12) сходится, чего могло бы и не быть, если бы разность  $\sigma_- - \sigma_+$  стремилась к нулю как  $1/\ln \omega$ . Вычисляя этот интеграл по известным данным об энергетическом ходе сечений, получим

$$\frac{\mu}{4\pi^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{\sigma_- - \sigma_+}{q'} d\omega' = -4\pi \frac{0,07}{\mu}. \quad (11,15)$$

Следовательно,

$$\text{Re } M_1^{(-)}(\mu) = 4\pi \left( \frac{0,09}{\mu} + \frac{0,07}{\mu} \right) = 4\pi \frac{0,16}{\mu}. \quad (11,16)$$

Таким образом, вклад многочастичных состояний в длину рассеяния  $\text{Re } M^{(-)}$  оказывается противоположного знака и всего лишь вдвое меньшим, чем вклад одночастичных состояний. Это значит, что ими нельзя пренебрегать, как это делалось в теории эффекта Комптона. Физической причиной этого является гораздо большая интенсивность ядерных взаимодействий по сравнению с электромагнитными.

Для сравнения вычислим одночастичный вклад теоретически:

$$\begin{aligned} \text{Im } M_1 &= \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \delta(p_1 + q_1 - p_n) \langle p_1 q_1 | p_n \rangle^+ \langle p_n | p_1 q_1 \rangle = \\ &= \pi \sum_s \int d^3 p_n i g \bar{u}(p_1) \gamma_5 u_s(p_n) \cdot i g \bar{u}_s(p_n) \gamma_5 u(p_1) \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \delta(p_1 + q_1 - p_n) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -2\pi M \int d^4 p_n \delta(p_n^2 + M^2) \delta^4(p_1 + q_1 - p_n) g^2 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \frac{-i \gamma_\mu p_n^\mu + M}{2M} \gamma_5 u(p_1) = \\
&= -\pi g^2 \delta(p_1, q_1^2 + M^2) \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma_5 [-i \gamma_\mu (p_1 + q_1) n^\mu] \gamma_5 u(p_1) = \\
&= -\pi g^2 \delta(2p_1 \cdot q_1 - \mu^2) \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma_\mu i \gamma_\mu q_1 u(p_1).
\end{aligned}
\tag{11,17}$$

Для рассеяния вперед, когда  $p_1 = p_2$ , с помощью (3,36) находим

$$\text{Im } M_1^{(1)}(\omega) = -\pi g^2 \delta(-2M\omega - \mu^2) \frac{p_1 \cdot q_1}{M} = \pi g^2 \omega \delta(2M\omega + \mu^2). \tag{11,18}$$

Благодаря этому

$$\begin{aligned}
M_1^{(1)}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im } M_1^{(1)}(\omega') d\omega' \left( \frac{1}{\omega' - \omega} - \frac{1}{\omega' + \omega} \right) = \\
&= g^2 \frac{\mu^2}{4M^2} \left( \frac{1}{-\mu^2/2M - \omega} - \frac{1}{-\mu^2/2M + \omega} \right) = g^2 \left( \frac{\mu}{2M} \right)^2 \frac{2\omega}{\omega^2 - (\mu^2/2M)^2}.
\end{aligned}
\tag{11,19}$$

Таким образом,

$$\text{Re } M_1^{(1)}(\mu) = 4\pi \frac{2\mu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - (\mu/2M)^2}. \tag{11,20}$$

Сравнивая (11,20) с (11,16), находим, что

$$f^2 = \frac{g^2}{4\pi} \left( \frac{\mu}{2M} \right)^2 = 0,08. \tag{11,21}$$

Если сравнить между собой пионный и фотонный матричный элементы

$$\langle \pi M / M \rangle = i g \bar{u} \gamma_5 u, \quad \langle \gamma e / e \rangle = i e \bar{u} \gamma_\mu u,$$

то станет ясной аналогия ядерной константы связи  $g$  и электрического заряда  $e$ . В количественном отношении

нии они значительно разнятся

$$e^2/4\pi = 1/137, \quad g^2/4\pi = 0,08(2M/\mu)^2 \approx 15. \quad (11,22)$$

Таким образом, силы, создаваемые пионным полем, в 2000 раз больше электромагнитных сил.

## § 12. Теория эффективного радиуса

Основной вывод, который можно получить из результатов предыдущего параграфа, состоит в том, что, благодаря большой величине ядерной константы связи, вклад двухчастичных состояний /а быть может, и более сложных/ сравним с вкладом одночастичных. Это значит, что методы, использованные в гл. 2, не могут быть применены в теории ядерных взаимодействий.

Необходимость учета двухчастичных состояний сразу усложняет теорию, так как дисперсионные соотношения становятся интегральными уравнениями: мнимые части амплитуд вследствие унитарности выражаются через те же амплитуды, которые необходимо найти.

Сложный вид условия унитарности заставляет искать другие пути решения основного вопроса — определения амплитуды рассеяния.

Одним из интересных приемов решения этого вопроса является анализ парциальных амплитуд рассеяния. Парциальная амплитуда — это коэффициент в разложении полной амплитуды рассеяния в ряд по собственным функциям момента количества движения. Удобство парциальных амплитуд состоит в том, что условие унитарности для них записывается очень просто, если рассеяние идет в одном канале и не рассматриваются неупругие процессы. Тогда

$$\operatorname{Im} f_{je} = q |f_{je}|^2. \quad (12,1)$$

Действительно, благодаря сохранению момента количества движения сечение рассеяния аддитивно складывается из парциальных сечений

$$\sigma_{tot} = \sum_j \sigma_j = 4\pi \sum_j |f_j|^2. \quad (12,2)$$

Поскольку вся амплитуда также аддитивно составлена из  $f_j$ , то оптическая теорема (2,26) приводится к виду (12,1).

Благодаря такому упрощению условия унитарности, дисперсионное соотношение приобретает вид несложного интегрального уравнения, — поскольку речь идет о физической части ( $\omega \geq \mu$ ) дисперсионного интеграла. Одночастичные вклады могут быть вычислены точно, и вся проблема сводится к изучению "левого разреза" ( $\omega < 0$ ).

Трудности, с которыми мы сталкиваемся в этой области, обусловлены тем, что оптическая теорема (12,1) здесь уже неприменима. Условие перекрестной симметрии, которое выглядит очень просто для полной амплитуды, становится очень громоздким, если написать его для парциальной амплитуды, поскольку при этом войдут все парциальные амплитуды. Более того, благодаря наличию трех каналов в упругом рассеянии возникают комплексные разрезы, на которых терлет смысл разложение полной амплитуды на парциальные [33].

Простейшим выходом из этого положения является пренебрежение всеми "левыми" особенностями, кроме одностичных. К сожалению, ценность этого приближения неизвестна, хотя высказываются надежды, что по крайней мере в области малых энергий оно окажется достаточно точным [34]. Многочисленные попытки оценить вклад левого разреза с помощью метода Мандельштама не дали положительных результатов [35].

Вместе с тем отбрасывание "левых" особенностей значительно обедняет физическую картину взаимодействия. Действительно, все эти особенности /полюса и

точки ветвления/ обусловлены обменом одной или несколькими частицами, что приводит к возникновению сил взаимодействия. Учет одночастичного обмена фотоном или мезоном означает введение кулоновских или Юкавских сил <sup>12)</sup>. Многочастичные обмены приводят к более короткодействующим силам, например, типа сил отталкивания, действующих между нуклонами на близких расстояниях и ведущих к насыщению ядерных сил.

В области низких энергий, действительно, существует только "хвост" потенциала взаимодействия, так что можно ограничиться учетом только самых дальнедействующих сил, а значит только одночастичного обмена. Вместе с тем это приближение способно дать больше, чем обычная теория рассеяния на потенциале Юкава, так как в дисперсионном подходе автоматически будет учтена унитарность.

Таким образом, мы ограничимся учетом только одночастичных полюсов парциальных амплитуд, точно учитывая вместе с тем условие унитарности на физическом разрезе. Тогда дисперсионное соотношение для парциальной амплитуды примет вид

$$f(\omega) = f_B(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{q'^2 |f(\omega')|^2 d\omega'}{\omega' - \omega - i\epsilon} \quad (12,3)$$

Одночастичный вклад в амплитуду  $f_B(\omega)$  обычно называют борновским приближением. Действительно, в методе М. Борна [36] взаимодействие трактуется как возмущение, а первое приближение теории возмущений в точности совпадает с дисперсионным одночастичным приближением.

Благодаря тому, что  $f_B(\omega)$  обусловлена обменом одной частицей, она имеет полюс при некоторой энергии  $\omega_0$ , т.е.

---

<sup>12)</sup> Простой пример был рассмотрен нами в § 5, где полюс по переменной  $t$ , обусловленный обменом одним фотоном, приводит к кулоновским силам и резерфордскому рассеянию.

$$f_B(\omega) = \frac{A}{\omega - \omega_0} \quad (12,4)$$

Интегральное уравнение (12,3) с таким видом неоднородного члена может быть решено в общем виде [37]. Мы сделаем это сейчас и проведем общий анализ решения, а конкретный расчет величин  $A$  и  $\omega$  проведем позже.

Введем функцию

$$g(\omega) = \frac{f_B(\omega)}{f(\omega)} \quad (12,5)$$

и рассмотрим ее аналитические свойства.  $g(\omega)$  имеет ту же точку ветвления, что и  $f(\omega)$ , причем скачок ее на разрезе, начинающемся у этой точки, равен

$$\text{Im } g(\omega) = -f_B(\omega) \frac{\text{Im } f(\omega)}{|f(\omega)|^2} = -g f_B(\omega), \quad (12,6)$$

т.е. полностью известен. Если  $f(\omega)$  не имеет нулей, то  $g(\omega)$  не имеет полюсов, так как при  $\omega = \omega_0$  она имеет устранимую особенность

$$g(\omega_0) = 1. \quad (12,7)$$

Аналитическая функция с такими свойствами может быть записана в виде

$$g(\omega) = 1 - \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{g' f_B(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega - i\varepsilon)}, \quad (12,8)$$

а искомая парциальная амплитуда -

$$f(\omega) = \frac{f_B(\omega)}{1 - \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{g' f_B(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega)} - i g f_B(\omega) \theta(\omega - \mu)} \quad (12,9)$$

В этом выражении мы разделили вещественную и мнимую части для того, чтобы было ясно видно выполнение требования унитарности.

Важнейшим предположением, сделанным в процессе решения уравнений (12,3-4), является требование отсутствия нулей у  $f(\omega)$ . Если это требование снять, то  $g(\omega)$  сможет иметь полюса [38], вычеты в которых нам неизвестны. Это сразу приводит к многозначности решений и затемняет обстановку. Физический смысл этой неоднозначности был выяснен Ф.Дайсоном [39]. Полюса СДД появляются при рассеянии на возбужденных состояниях нуклонов. Имея в виду это уточнение, обратимся к анализу решения (12,9).

Энергетический ход амплитуды  $f(\omega)$  существенно зависит от свойств функции

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{g'(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega)}, \quad (12,10)$$

так называемого эффективного радиуса. Если уравнение

$$1 = (\omega - \omega_0) R(\omega) \quad (12,11)$$

имеет решение  $\omega = \omega_2 > \mu$ , то амплитуда проходит через резонанс при энергии  $\omega_2$ . Действительно, при  $\omega = \omega_2$   $f = i/q$ . Нетрудно видеть, что вследствие условия унитарности это значение является максимально возможным для данной амплитуды /так называемый унитарный предел/. Пусть

$$f = |f| e^{i\delta} \quad (12,12)$$

Тогда  $\text{Im} f = |f| \sin \delta$  и из (12,1) следует, что  $|f| = \sin \delta / q$ . Следовательно, требование унитарности означает, что

$$f = \frac{e^{i\delta} \sin \delta}{q} \quad (12,13)$$

/достаточно знать только фазу  $\delta$ , чтобы определить всю парциальную амплитуду/. Из (12,13) как раз и следует наличие унитарного предела для парциального сечения

$$|\ell|^2 \leq \frac{1}{q^2}.$$

(12,14)

Достижение этого предела и есть резонанс. Он происходит при  $\delta = \pi/2$ . Типичный резонансный ход сечения изображен на рис. 15.

Таким образом, дисперсионная теория предсказывает возможность появления резонансов в парциальных сечениях рассеяния. Чтобы эта возможность смогла воплотиться в реальность, необходимо выполнить ряд условий. Прежде всего, необходимо, чтобы было  $R > 0$ , а значит вычит  $A$  /см. уравнение (12,4) / также должен быть положительным. Это значит, что силы, возникающие вследствие одночастичного обмена, должны быть силами притяжения. Конечно, не всякие силы притяжения могут привести к резонансу: необходимо еще, чтобы они имели достаточную величину. Это сводится к необходимости удовлетворить уравнение (12,11).

Заметим, что при вычислении эффективного радиуса по формуле (12,10) мы выходим за рамки сделанного ранее ограничения малыми энергиями, когда ведем интегрирование до бесконечности. Фактически необходимо ввести энергию обрезания  $\omega_{\max}$ , до которой еще можно считать сделанное приближение правильным <sup>13)</sup>. Все результаты зависят от параметра  $\rho = \omega/\omega_{\max}$ : теория асимптотически верна при  $\rho \rightarrow 0$  и заведомо неправильна при  $\rho \rightarrow 1$ . Где находится истинная граница справедливости теории, пока не выяснено. Из сравнения с экспериментом можно заключить, что эта граница располагается в области

<sup>13)</sup> После подстановки (12,4) в качестве  $\ell_B$  получается,

$$R = R_0 \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)} x dx}{(1-n^2 x^2)(1-\omega^2 x^2)}; R_0 = \frac{4\pi M \ell^2}{\pi^2 (\mu + \mu)^2}; y_0 = \frac{\mu + \mu}{\omega_{\max}}; \kappa = \frac{\mu - \mu}{\mu + \mu}; n = \frac{\mu}{\mu + \mu}; \omega = \frac{\mu^2}{\mu + \mu}.$$

Особенность при  $x = 1/\omega$  интегрируется по главному значению. Интеграл может быть выражен через эллиптические функции.

$\approx 300$  Мэв, где начинается эффективное образование мезонов <sup>14)</sup>.

Приближение, в котором принимается  $R(\omega) \approx \text{const.}$ , называется приближением эффективного радиуса. В этом случае справедливо представление амплитуды

$$f = \frac{f_s}{1 - (\omega - \omega_0) R - i g f_s \theta(\omega - \mu)} \quad (12,15)$$

и, если  $R > 0$ , то амплитуда представляется в форме Брейта-Вигнера

$$f = \frac{1}{g} \frac{\Gamma/2}{\omega_2 - \omega - i\Gamma/2} \quad (12,16)$$

с параметрами

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{R}; \quad \Gamma/2 = g f_s / R \approx \omega_2 g f_s(\omega). \quad (12,17)$$

Приближение эффективного радиуса может быть исследовано экспериментально. Согласно (12,15) оно эквивалентно утверждению, что

$$R_c \frac{f_s(\omega)}{f(\omega)} = 1 - (\omega - \omega_0) R, \quad (12,18)$$

т.е. левая часть есть линейная функция энергии.

### § 13. Парциальные амплитуды $\pi N$ -рассеяния

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о вычислении борновского приближения для парциальной амплитуды, необходимого для определения констант  $A$  и  $\omega_0$ , входящих в выражение амплитуды в теории эффективного радиуса. Полная амплитуда рассеяния была найдена в § 11 /см. формулу (11,17) /:

<sup>14)</sup> Имеются попытки продвинуться выше по энергии, учитывая  $\pi\pi$ -взаимодействие /см. § 14 /.



$$T_6 = -\frac{g^2}{2\mu \cdot q_1 \cdot \kappa^2} \bar{u}_2 \tau_c \tau_\kappa i \gamma_5 q_1 u_1 + (\text{слож. чл.}) = \quad (13,1)$$

$$= -g^2 \bar{u}_2 \left\{ \frac{\tau_c \tau_\kappa i \hat{q}_1}{2\mu q_1 - \kappa^2} + \frac{\tau_\kappa \tau_c (-i \hat{q}_2)}{-2\mu \cdot q_2 - \kappa^2} \right\} u_1.$$

Отсюда следует, что инвариантные функции  $A, B$  равны соответственно

$$A_5^{(t)} = 0, \quad B_5^{(t)} = g^2 \left( \frac{1}{s - \mu^2} + \frac{1}{u - \mu^2} \right), \quad (13,2)$$

где  $s, u$  — переменные Мандельштама /см. (10,3)/.

Коэффициенты разложения  $B_5$  в ряд по полиномам Лежандра

$$B(s, u) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) B_l(s) \quad (13,3)$$

могут быть найдены:

$$B_l(s) = \frac{1}{2} \int_0^\pi B(s, u) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 B(s, u) P_l(z) dz =$$

$$= \frac{1}{2} g^2 \int_{-1}^1 P_l(z) dz \left( \frac{1}{s - \mu^2} + \frac{1}{\mu^2 + 2\kappa^2 - s + 2q^2(1-z)} \right) = \quad (13,4)$$

$$= g^2 \left\{ \frac{\delta_{l0}}{s - \mu^2} + \frac{1}{2q^2} Q_l \left( 1 + \frac{\mu^2 + 2\kappa^2 - s}{2q^2} \right) \right\}.$$

Здесь  $Q_l$  — присоединенная функция Лежандра /см. [40]/, возникающая в результате интегрирования

$$Q_l(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(z) dz}{t - z}. \quad (13,5)$$

При небольшой энергии  $|t| \gg 1$  можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$Q_e(t) \approx \frac{e!}{(2e+1)!!} \left(\frac{1}{t}\right)^{e+1} \quad (13,6)$$

и, если пренебречь  $\kappa^2 \ll 2M\omega$ , то получим

$$B_e^{\text{борт}} = \frac{g^2}{2M\omega} \left\{ \delta_{e0} \pm \frac{(-1)^e e!}{(2e+1)!!} \left(\frac{g^2}{2M\omega}\right)^e \right\} \quad (13,7)$$

Теперь необходимо выразить  $f_{\ell e}$  через  $B_{\ell}$ . Общая формула, служащая для этой цели, имеет вид [41, 29]

$$f_{\ell e} = \frac{E+M}{8\pi W} [A_e - (W-M)B_e] - \frac{E-M}{8\pi W} [A_{e+1} + (W+M)B_{e+1}]. \quad (13,8)$$

Индекс  $\ell \pm$  при амплитуде означает, что она соответствует моменту  $j = \ell \pm 1/2$ ,  $E = (W^2 + M^2 + \kappa^2)/2W$  — энергия нуклона в с.ц.м.

В статическом приближении  $W \approx M + \mu$ ,  $E \approx M + \mu^2/2M$  и можно положить

$$(E+M)(W-M)/W \approx 2\omega; \quad (E-M)(W+M)/W \approx g^2/M. \quad (13,9)$$

С учетом  $A_e^{\text{борт}} = 0$  это приводит (13,8) к виду

$$f_{\ell e} = -\frac{\omega}{4\pi} \left( B_e + \frac{g^2}{2M\omega} B_{e+1} \right). \quad (13,10)$$

Теперь вычисляем последовательно все амплитуды:

$$S_{1/2} = f_{0+} = -\frac{\omega}{4\pi} \left( B_0 + \frac{g^2}{2M\omega} B_1 \right) \approx -\frac{g^2}{8\pi M} (1 \pm 1). \quad (13,11)$$

$$\begin{aligned} P_{1/2} = f_{1-} &= -\frac{\omega}{4\pi} \left( B_1 + \frac{g^2}{2M\omega} B_0 \right) \approx -\frac{g^2}{8\pi M} \left[ \mp \frac{g^2}{3M\omega} + \frac{g^2}{2M\omega} (1 \pm 1) \right] = \\ &= -\frac{g^2}{48\pi M^2} \cdot \frac{g^2}{\omega} (3 \pm 3 \mp 2). \end{aligned} \quad (13,12)$$

$$P_{32} = f_{1+} = -\frac{\omega}{4\pi} \left( B_1 + \frac{q^2}{2M\omega} B_2 \right) \approx -\frac{q^2}{8\pi M} \left( \mp \frac{q^2}{3M\omega} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2}{15} \frac{q^4}{M^2\omega^2} \approx \pm \frac{q^2}{24\pi M^2} \cdot \frac{q^2}{\omega} \right. \quad (13,13)$$

Легко видеть, что  $f_{\ell} \sim q^{2\ell}$  независимо от  $\ell$ , но коэффициент пропорциональности зависит и от  $j$ , и от изо-спина. Переходя от дисперсионных амплитуд к изотопическим по формулам /см. прил. Г/

$$f(T=3/2) = f^{(+)} - f^{(-)}; \quad f(T=1/2) = f^{(+)} + 2f^{(-)} \quad (13,14)$$

находим /в обозначении  $f_{2j,2T}$  /:

$$f_{11}^{(S)} = -\frac{q^2}{4\pi M} = f_{13}^{(S)} \quad (13,15)$$

$$f_{11}^{(P)} = -\frac{q^2}{6\pi M^2} \frac{q^2}{\omega}; \quad f_{13}^{(P)} = -\frac{q^2}{24\pi M^2} \frac{q^2}{\omega} = f_{31}^{(P)};$$

$$f_{33}^{(P)} = \frac{q^2}{12\pi M^2} \frac{q^2}{\omega}; \quad (13,16)$$

Мы снабдили амплитуды индексами  $S, P$ , указывающими, из какой волны они вычислены. Это существенно, так как  $S, P$ -волны отличаются четностью.

Из (13,15) видно, что  $S$ -волны не зависят от изоспина. Это противоречит экспериментальным данным [42]. Причина противоречия вскрывается без труда: в  $S$ -волне велика вероятность взаимодействия на близких расстояниях /нет центробежного барьера/, что усиливает роль многочастичных обменов, которые мы не учитывали. Последние попытки в направлении учета особенностей, вызванных этими обменами, по-видимому,

снимают противоречие с опытом [43].

В  $P$ -волнах имеется характерное равенство  $f_{13} = f_{31}$ , обусловленное тем, что в статическом приближении механический и изотопический спины совершенно аналогичны. Все  $P$ -амплитуды малы вследствие появления "центробежного" множителя  $q^2$ .

Из всех  $S, P$ -амплитуд только одна  $f_{33}$  положительна. Следовательно, только в этом состоянии  $j = 3/2, T = 3/2, P = -1$  действуют силы притяжения и возможен резонанс. Экспериментально этот резонанс обнаружен еще Э. Ферми и сотр. [44].

Наличие резонанса в состоянии  $(3/2, 3/2)$  представляет собой наиболее характерную черту  $\pi$ -мезонной физики низких энергий. С помощью уравнения (12,16) можно воспроизвести весь ход сечений рассеяния и проследить влияние резонанса. Наиболее ярко он проявляется в реакции  $\pi^+ + \rho \rightarrow \pi^+ + \rho$ , так как ее амплитуда содержит только  $M_{3/2}$  без примеси нерезонирующей  $M_{1/2}$ . Пренебрегая последней, имеем

$$\sigma_{\pi^+\rho} = |M_{3/2}|^2; \quad \sigma_{\pi^-\rho} = \frac{1}{3} |M_{3/2}|^2. \quad (13,17)$$

Как определить  $\omega_n$  теоретически? Для этого можно воспользоваться найденной в § 11 величиной  $f^2 = 908$  и борновскими амплитудами, найденными выше.

Исторически дело обстояло иначе. Чу и Лоу [37] развили в 1954-1956 гг. статическую теорию рассеяния, которая в одномезонном приближении привела их к соотношению эффективного радиуса (12,18) со статическими значениями борновских амплитуд, приведенными в (13,15-16). Для амплитуды  $f_{33}$  это уравнение имеет вид

$$\frac{4}{3} \frac{f^2}{\mu^2} \frac{q^2}{\omega} \cdot q \operatorname{ctg} \delta_{33} = 1 - \omega r_3. \quad (13,18)$$

По предложению Чу экспериментальные данные были представлены в виде графика

$$\frac{q^3}{\omega} \operatorname{ctg} \delta_{33} = f(\omega). \quad (13,19)$$

Используя экспериментальные данные, можно интерполировать эту зависимость прямой и определить отсюда  $\tau$ . Очевидно, эта величина будет нижним пределом ввиду зависимости  $\tau(\omega)$ , и поэтому она даст несколько завышенное значение  $\omega_r$ . С другой стороны, экстраполируя прямолинейную зависимость в нефизическую область  $\omega < \mu$  до  $\omega = \omega_0$  можно независимо определить ядерную константу связи  $f^2$ . Она оказывается равной<sup>15)</sup>

$$f^2 = 0,08 \pm 10\% \quad (13,20)$$

в хорошем согласии с величиной, найденной позже из дисперсионных соотношений /см. § 11 /.

Согласно с экспериментальным данным [42]

$$\omega_r = 195,4 \text{ Мэв} \quad (13,21)$$

При этом

$$\sigma_{\text{max}} = (2j+1) \frac{2\pi}{q^2} = \frac{8\pi}{q^2} \approx 200 \text{ мбарн} \quad (13,22)$$

что прекрасно согласуется с экспериментом. Это значит, что в области резонанса все другие амплитуды вносят очень малый вклад в сечение.

$D, F$  и более высокие амплитуды при малых энергиях очень малы вследствие действия центробежного барьера. При больших энергиях они уже существенны, но не могут быть вычислены по статической теории. Тем не менее и в этих волнах также возможны резонансы.

Хотя предвычислить положение резонанса  $(3/2, 3/2)$  методом, изложенным в параграфе 12 и невозможно,

---

<sup>15)</sup> См. S. J. Lindenbaum, I. C. L. Yuan, Phys. Rev., **100**, 306 (1955).

но оценить его ширину удастся. Проведем этот расчет.

Из формулы (12,17) и (13,16) вытекает, что

$$\Gamma/2 = \frac{4}{3} \frac{f^2}{\kappa^2} \cdot \frac{q^2}{\omega} \cdot \frac{q}{R(\omega)} \quad f^2 = \frac{q^2}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{2M} \right)^2. \quad (13,23)$$

В приближении эффективного радиуса  $R(\omega) \approx 1/\omega$ .

Разлагая затем выражение

$$\omega = (q^2 + \sqrt{(q^2 + \kappa^2)(q^2 + M^2)})/\kappa \quad (13,24)$$

в ряд по степеням  $q^2$ , получим

$$\omega = \kappa + \frac{q^2}{2\kappa} \left( 1 + \frac{\kappa}{M} \right)^2. \quad (13,25)$$

Таким образом,

$$(\Gamma/2)_{\text{теор}} = \frac{4}{3} \frac{f^2}{\kappa^3} \cdot \frac{q^3}{1 + q^2/2m^2}. \quad (13,26)$$

Здесь  $m = \kappa M/(\kappa + M)$  — приведенная масса пиона и нуклона. Экспериментально обычно записывают ширину в виде

$$(\Gamma/2)_{\text{эксп}} = \gamma \frac{(qr)^3}{1 + (qr)^2}, \quad (13,27)$$

где  $\gamma$  — так называемая приведенная ширина,  $r$  — радиус взаимодействия. При этом множитель  $q^3$  представляет собой импульсную зависимость, характерную для  $P$ -волны, а знаменатель  $(1 + q^2 r^2)^{-1}$  является фурье-образом центробежного потенциала, обрезанного на  $r$  — радиусе действия сил притяжения.

Из сравнения формул (13,25-26) вытекает, что

$$r = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{M} \right); \quad \gamma = \frac{4}{3} \frac{f^2 \omega r}{(\kappa r)^3}. \quad (13,28)$$

Подставляя численные значения масс, константы связи и резонансной энергии, найдем, что

$$r = \frac{0,81}{\kappa}; \quad \gamma = 0,48\kappa; \quad (13,29)$$

Получающаяся формула

$$(\Gamma/2)_{теор} = 0,26 \frac{(q/\mu)^3}{1 + 0,66(q/\mu)^2} \quad (13,30)$$

может быть сравнена с

$$(\Gamma/2)_{эксп} = 0,34 \frac{(q/\mu)^3}{1 + 0,95(q/\mu)^2}, \quad (13,31)$$

которая получена в результате обработки экспериментальных данных [42]. Расхождение в точке резонанса  $1/q^2/\mu^2 = 2,74$  не превосходит 7 %. Полуширины резонансной кривой на левом и правом крыле равны соответственно  $0,35\mu$  и  $0,90\mu$ , тогда как из эксперимента получаются числа  $0,40\mu$  и  $0,96\mu$ . Все эти расхождения не выходят за пределы 10%, которыми ограничена точность теоретических расчетов, использующих контакту связи  $f^2$ .

Отметим в заключение, что в феноменологических теориях приведенная ширина  $\gamma$  часто выражается в виде  $\gamma = \bar{E}/2$ , где  $\bar{E}$  — средняя энергия частицы внутри барьера, т.е. в нашем случае — энергия мезона внутри нуклона. Из (13,28) получаем  $\bar{E} = 0,96\mu$ , что согласуется с обычными оценками в духе соотношений неопределенности.

#### § 14. Резонансные "частицы". $\pi\pi$ -резонанс

Основным результатом дисперсионного рассмотрения является формула

$$f = \frac{1}{q} \cdot \frac{\Gamma/2}{\omega_k - \omega - i\Gamma/2}, \quad (14,1)$$

выведенная в §12. Напомним, что при выводе ее были учтены:

- а/ силы взаимодействия, обусловленные одночастичным обменом,
- б/ унитарность в физической области,
- в/ отсутствие нулей амплитуды рассеяния.

Согласно (14,1), резонанс обусловлен наличием у амплитуды рассеяния полюса

$$\Omega = \omega_n - i\Gamma/2, \quad (14,2)$$

лежащего в нижней полуплоскости энергии <sup>16)</sup>. Это наводит на мысль о введении "частицы" с комплексной массой  $\Omega$ . Тогда диаграмма

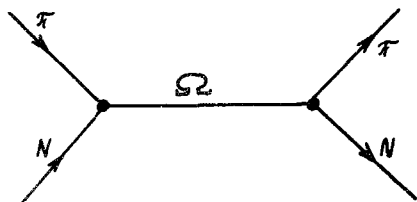


Рис. 16

приводила бы сразу к появлению комплексного полюса и резонанса в нужном месте. Эта "частица" неустойчива, так как  $M_\Omega > M_N$  ввиду того, что  $\omega_n > n$ . Вследствие этого ее масса содержит мнимую часть, связанную со временем жизни  $\tau = 1/\Gamma$ .

Этот, довольно прямолинейный, прием может быть заменен более последовательным подходом. Хорошо известно [9], что  $T$ -матрица, подчиняющаяся требованию

---

<sup>16)</sup> В верхней полуплоскости энергии не может быть полюсов, так как тогда  $\text{Im} f < 0$ , в противоречии с унитарностью.



унитарности, может быть получена как решение уравнения

$$T = K + iKT, \quad (14,3)$$

где эрмитова матрица  $K$  описывает эффекты рассматриваемого взаимодействия. Представим это взаимодействие диагр. 16. Тогда

$$\mathcal{I}_m K = \pi w \delta(\omega_n - \omega), \quad (14,4)$$

где  $w$  - квадрат модуля угла  $\pi N \Omega$ . Следовательно,

$$K = \frac{w}{\omega_n - \omega} ; \quad T = \frac{w}{\omega_n - \omega - i0} \quad (14,5)$$

Эта формула совпадает с (14,1). Таким образом, достаточно постулировать существование частицы с массой  $M = W_n$  и вероятностью распада  $w$ ; чтобы получить резонансную формулу для амплитуды рассеяния.

Конечно, это насквозь феноменологический подход. Его недостатки проявляются в трех пунктах:

- а/ резонансная "частица" вводится *ad hoc*, предсказать ее существование невозможно,
- б/ масса "частицы" неизвестна,
- в/ вероятность распада может быть найдена только при условии, что все квантовые числа резонансной "частицы" известны.

При таких условиях, очевидно, нет необходимости "выводить" формулу, так как все ее параметры приходится извлекать из опыта. Однако, как полуфеноменологический, этот подход оправдывает себя. Так, в работе Тамма, Гольдфанда и Тайнберга [45] теория  $\pi N$ -рассеяния была построена на основе введения "изобарного" состояния нуклона  $N^*$  с помощью диаграмм вида рис.16 и интегрального уравнения Гайтлера. Аналогичным образом рассуждал Такеда [46], предложивший объяснить второй резонанс  $\pi N$ -рассеяния с помощью резонансного

### $\pi\pi$ - взаимодействия.

В последнее время описанный выше подход получил большое распространение [47, 48, 49]. Причины этого ясны: вместо сложной теории двухчастичного разреза можно пользоваться простыми формулами одночастичной теории. Часто, однако, на этом пути встречаются и ошибочные заключения. Так, в работе [49] сделана попытка получить  $\pi\pi$  -резонанс с помощью диаграммы 17,

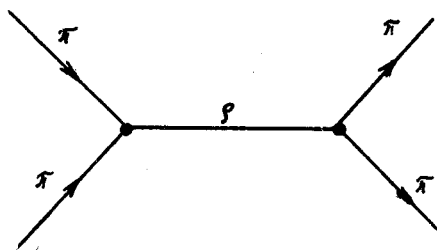


Рис. 17

в которой  $\pi$  -мезоны обмениваются  $\rho$  -частицей. Проведенный выше анализ ясно показывает, что резонанса в этом случае не будет, так как обмен резонансной "частицей" происходит по диаграмме 17 в перекрестном канале. К успеху может привести только диаграмма вида 16, в которой нуклон заменен  $\pi$  -мезоном, а промежуточной частицей является " $\rho$  -частица". В результате получается

$$f = \frac{1}{g} \frac{\Gamma/2}{\omega_p - \omega - i\Gamma/2}, \quad (14,6)$$

где  $\omega_p$  определяется массой  $\rho$  -частицы, а  $\Gamma/2$  - ее квантовыми числами. Если эти числа суть  $j=1$ ,  $P=-1$ , то

$$\Gamma/2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{g^2}{4\pi} \cdot \frac{q^3}{M_\rho^2} \quad (14.7)$$

где  $g$  - константа связи в узле  $\pi\pi\rho$ ,  $q$  - импульс  $\pi$  -она в с.ц.м. Эта же формула (14.7) выводится из борновского приближения к амплитуде рассеяния, причем этот подход позволяет получить  $M_\rho$  и  $g^2/4\pi$  из известных  $\omega_\rho$  и  $\Gamma/2$ .

## § 15. Общий взгляд на теорию $\pi N$ -рассеяния

Идеи, которые обсуждались в предыдущих параграфах, позволяют дать качественную картину процесса  $\pi N$ -рассеяния вплоть до довольно высоких энергий. Мы будем ниже говорить о поведении мнимой части амплитуды прямого канала реакции  $\pi N \rightarrow \pi N$ , так как для нее - в силу условия унитарности - имеет место разделение вкладов промежуточных состояний.

Учитывая вклады состояний  $|N\rangle$  и  $|\pi N\rangle$ , мы придем к уравнению (12,3), которое позволяет вычислить простейшие парциальные амплитуды. Если говорить об области малых энергий, то знания их достаточно для объяснения всего экспериментального материала, включая теорию резонанса ( $3/2, 3/2$ ).

При более высоких энергиях следует учитывать промежуточные состояния ( $\pi\pi N$ ). Сложность расчета трехчастичного вклада значительно смягчается, если перейти к представлению о резонансных "частицах". Точно так же, как в § 14, состояние  $|\pi N\rangle$  заменилось на  $|N'\rangle$ , так и здесь  $|\pi\pi N\rangle$  можно заменить на  $|\rho N\rangle$ , где  $\rho$  - резонансная "частица", соответствующая  $\pi\pi$ -взаимодействию. Порог этой реакции равен

$$E_{\text{пор}} = \frac{(M_\rho + M_N)^2 - (M_\pi + M_N)^2}{2M_N} = 900 \text{ МэВ}.$$

Поскольку,  $U_{\pi T}$  в этой области приобретает быстро возрастающее слагаемое, то в соответствии с дисперсионными соотношениями и вся амплитуда в этой области будет расти, пока не достигнет унитарного предела. Таким образом, введение  $\rho$ -частицы приводит к выводу о наличии второго резонанса  $\pi N$ -рассеяния в области  $\approx 1.5 \text{ Бэ}$ . Этот вывод находится в соответствии с экспериментальными данными [50].

Какова общая картина рассеяния в области более высоких энергий? Второй  $\pi N$ -резонанс уже носит неупругий характер, так как его первопричиной является отличие от нуля матричного элемента  $\langle \pi N | T | \pi N \rangle$ . С ростом энергии роль неупругих процессов еще более повышается, пороги неупругих процессов сгущаются и становится трудным разделение вкладов отдельных состояний в общую часть. В конце концов мы приходим к представлению о двух каналах рассеяния - упругом и неупругом, связанных между собой условием унитарности. Если считать неупругое поглощение полным, то мы приходим к оптической модели рассеяния, с точки зрения которой упругая часть рассеяния имеет дифракционный характер [36]. Эти представления довольно хорошо согласуются с экспериментальными фактами [51]. В частности, оптическая модель естественным образом приводит к выводу о постоянстве полного сечения взаимодействия, являющемся наиболее характерным свойством сильных взаимодействий при больших энергиях.

## § 16. Странные частицы

Понятие "странные частицы" охватывает два разнородных объекта -  $K$ -мезоны и гипероны [17].

$K$ -мезоны имеют следующие характеристики:

[17) История их открытия и свойства подробно освещены в книге М.А.Маркова [52].

$$S = 0, \quad M_K = 494 \text{ МэВ}, \quad (16,1)$$

а гипероны имеются двух сортов <sup>18)</sup> :

$$S = \frac{1}{2}, \quad \begin{aligned} M_{\Lambda} &= 1115 \text{ МэВ} \\ M_{\Sigma} &= 1190 \text{ МэВ} \end{aligned} \quad (16,2)$$

Четности этих частиц здесь не указаны как потому, что они неизвестны до сих пор, так и по причинам, которые выяснятся ниже.

Основным свойством странных частиц является свойство совместного рождения. Это значит, что они не могут образоваться поодиночке. Например, возможны реакции

$$\pi + N = K + Y, \quad \pi + N \rightarrow K + \bar{K} + N \quad (16,3)$$

/ Y - символ какого-либо гиперона/, но не идут реакции

$$\pi + N \rightarrow K + N, \quad \pi + N \rightarrow \pi + Y. \quad (16,4)$$

Это привело Гелл-Манна к мысли о том, что странные частицы характеризуются особым квантовым числом - странностью, которая сохраняется в сильных взаимодействиях. Это квантовое число равно нулю для обычных частиц -  $\pi$  и  $N$ , но отлично от нуля для  $K, \Lambda, \Sigma$ . Рассмотрение реакций типа (16,3) показывает, что можно принять следующие значения странностей

$$S(K) = +1, \quad S(Y) = -1. \quad (16,5)$$

<sup>18)</sup> В данном параграфе не рассматривается каскадный гиперон  $\Xi$ , так как его свойства нам пока не требуются.

Тогда закон сохранения странности допускает реакции (16,3), но запрещает реакции (16,4).

Благодаря тому, что странные частицы образуются всегда парами, не представляется возможным определить их четности в отдельности. Вследствие этого физический смысл имеет только относительная четность двух частиц, но не их абсолютные четности. Если принять, что четность  $K$ -мезона положительна /т.е. он описывается скалярным полем/, то остаются две независимые четности для каждого из гиперонов. Они могут совпадать, но могут и отличаться. Существует несколько точек зрения на то, какой вариант распределения четностей по частицам имеет место в природе, но пока еще ни одна из них не признана единственно верной.

Странные частицы, как и обычные, образуют мультиплеты

$$K = (K^+, K^0); \quad \Lambda = (\Lambda_0); \quad \Sigma = (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), \quad (16,6)$$

что приводит к возможности введения и для них понятия изотопического спина, проекции которого различают частицы в мультиплете. Необходимо одновременно с этим указать, что у античастиц странность и проекция изоспина имеют противоположный знак. Поэтому, например,

$\bar{K}$ -мезон, имея отрицательную странность, отличается от  $K$ -мезона. Аналогично обстоит дело и у гиперонов, у которых античастицы не совпадают с частицами вследствие различия в странностях.

Как легко убедиться, имеет место следующая формула, связывающая проекцию изоспина, странность и электрический заряд

$$Q = T_z + \frac{n+S}{2}. \quad (16,7)$$

Здесь  $\lambda$  - барионное квантовое число, равное  $+1$  для всех барионов /нуклонов и гиперонов/,  $-1$  для их античастиц и  $0$  для всех остальных частиц. Мы объединяем нуклоны и гипероны в единое семейство барионов как благодаря близкой величине масс и совпадению спинов, так и более важной причине, которой является закон сохранения барионного числа. Барионное число сохраняется во всех процессах, что обеспечивает устойчивость ядерной материи.

Поскольку заряд и странность барионов сохраняются в процессе сильного взаимодействия, то это же относится и к  $T_z$ . Таким образом, закон сохранения проекции изоспина обобщается на реакции, в которых участвуют странные частицы.

Можно пойти дальше и предположить, что в сильных взаимодействиях сохраняются все проекции изоспина, то есть предположить, что изотропия изотопического пространства не нарушается и в присутствии странных частиц. В дальнейшем мы постоянно будем пользоваться этой гипотезой. Она не противоречит существующим экспериментальным данным, но справедливость ее еще не доказана.

Сделанное здесь предположение об изотопической инвариантности сильных взаимодействий открывает путь для классификации всех процессов взаимодействия. Мы делим их на три группы:

1/ сильные взаимодействия - инвариантны относительно поворотов изотопических осей /изотропное изо-пространство/,

2/ электромагнитные взаимодействия - инвариантны относительно поворотов вокруг третьей оси изо-пространства / осе-симметричное изо-пространство/,

3/ слабые взаимодействия - неинвариантны относительно изотопических преобразований /анизотропное изо-пространство/.

Такая классификация, очевидно, отражает существенные свойства взаимодействий - чем выше симметрия, тем сильнее связь.

На основании рассмотренных свойств можно утверждать, что при взаимодействии странных частиц между собой и с обычными частицами отличны от нуля матричные элементы

$$\langle K Y | \mathcal{M} \rangle, \quad \langle \pi Y | \Sigma \rangle, \quad (16,8)$$

которые, в дополнение к обычному элементу

$$\langle \pi \mathcal{M} | \mathcal{M} \rangle, \quad (16,9)$$

образуют систему всех простейших матричных элементов /матричный элемент  $\langle \pi \mathcal{M} | \mathcal{M} \rangle$  исчезает благодаря сохранению полного изоспина/, исключая процессы без барионов  $\langle \pi K | \pi K \rangle$  или с каскадным гипероном:  $\langle \bar{K} Y | \Sigma \rangle, \langle \pi \Sigma | \Sigma \rangle$ . Ядерные константы мы будем обозначать  $g_{\pi^0 \pi^0 \pi^0}, g_{\pi^0 \pi^0 \Sigma}, g_{\pi^0 \pi^0 \Sigma}$ , сохраняя за константой  $\pi \mathcal{M}$ -взаимодействия прежнее обозначение  $g$ . Очевидно, что в общем случае

$$g_{\pi^0 \pi^0 \pi^0} \neq g_{\pi^0 \pi^0 \Sigma}, \quad g_{\pi^0 \pi^0 \Sigma} \neq g_{\pi^0 \pi^0 \Sigma}, \quad (16,10)$$

хотя и возможны те или иные соотношения между ними, отражающие различные свойства симметрии, более высокой, чем изотопическая инвариантность [53,54].

## § 17. Рассеяние $K$ -мезонов на нейтронах вперед

Учитывая состояние наших знаний о свойствах мезонов, мы рассмотрим в данном параграфе простую теорию рассеяния  $K$ -мезонов вперед, аналогичную рассмотренной в § 11, имея в виду определить четности странных частиц и величины констант связи из экспериментальных данных.



Дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния вперед может быть с помощью перекрестной симметрии преобразовано к виду

$$A^{(\pm)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} A^{(\pm)}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} A^{(\mp)}(\omega') d\omega'}{\omega' + \omega} \quad (17,1)$$

/  $A^{(\pm)}$  - амплитуда рассеяния  $K^{\pm}$ -мезона на нейтроне вперед/. Отделим физическую область от нефизической и воспользуемся оптической теоремой / (2,25):

$$A^{(\pm)}(\omega) = B^{(\pm)}(\omega) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{M_K}^{\infty} \frac{q' \sigma_{\pm}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{1}{4\pi^2} \int_{M_K}^{\infty} \frac{q' \sigma_{\mp}(\omega') d\omega'}{\omega' + \omega} \quad (17,2)$$

$$B^{(\pm)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{M_K} d\omega' \left( \frac{\text{Im} A^{(\pm)}(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{\text{Im} A^{(\mp)}(\omega')}{\omega' + \omega} \right). \quad (17,3)$$

При вычислении дисперсионных интегралов (17,2) необходимо использовать экспериментальные данные об энергетическом ходе сечений. В настоящее время данные имеются до энергий  $\omega \lesssim 4M_K$  /т.е.  $E_{\text{кин}} \lesssim 4,5 \text{ БэВ}$  /. Их общий ход иллюстрирует рис. 18

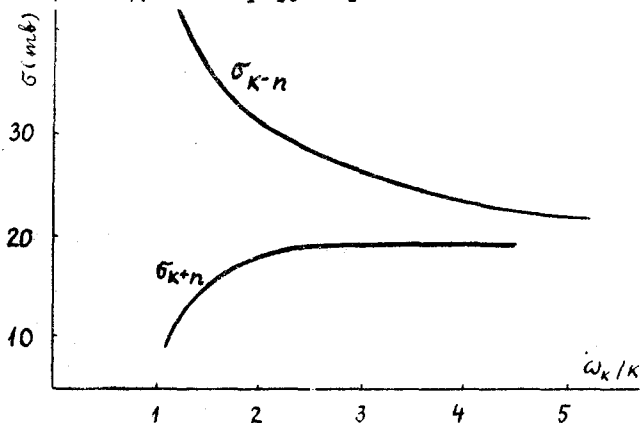


Рис. 18

При  $\omega \rightarrow \infty$  сечения выходят на плато, причем по теореме Померанчука  $\sigma_T(\infty) = \sigma(\infty)$ . Постоянство сечений на бесконечности означает, что использовать непосредственно соотношения (17,2-3) нельзя, так как это привело бы к расходящимся интегралам. Однако, если сопоставить, как и в § 11, разность амплитуд, то эта трудность исчезает. Мы получим при этом

$$A^{++}(\omega) - A^{+-}(\omega) = B^{++}(\omega) - B^{+-}(\omega) + \frac{\omega}{2\pi^2} \int_{M_K}^{\infty} q' \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (17,4)$$

Это соотношение можно использовать для того, чтобы определить  $B^{+-}$  и тем самым попытаться найти четности и константы связи, входящие в эту разность. Для этого необходимо знать  $A^{+-}$  или хотя бы их вещественные части:

$$\text{Re } A(\omega) = \pm \sqrt{\sigma_{\text{упр}}(\omega) - (\text{Im } A)^2} = \pm \sqrt{\sigma_{\text{упр}}(\omega, 0^\circ) - \left[ \frac{2}{4\pi} \sigma_{\text{из}}(\omega) \right]^2}. \quad (17,5)$$

К сожалению, непосредственно измерить сечение упругого рассеяния под углом  $0^\circ$  не удастся. Поэтому, строго говоря, следовало бы научиться угловое распределение при энергии  $\omega$ , выделить из него вклад ядерного взаимодействия и экстраполировать полученные данные к нулевому углу. Такая программа эксперимента в настоящее время может быть осуществлена лишь при малых энергиях. В этой области можно утверждать, что угловое распределение изотропно [54]. Поэтому

$$\sigma_{\text{упр}}(\omega, 0^\circ) = \frac{1}{4\pi} \sigma_{\text{упр}}(\omega), \quad (17,6)$$

после чего уравнение (17,5) позволяет найти  $|\text{Re } A|$ .

Знак  $\text{Re } A$  определяет характер сил, действующих между  $K$ -мезоном и нейтроном. Проще всего в этом убедиться с помощью нерелятивистской формулы Борна [36]

$$A = -2\pi \int_0^{\infty} U(r) \frac{\sin qr}{qr} r^2 dr. \quad (17,7)$$

Из нее видно, что для сил притяжения  $U(r) < 0$ , а  $A > 0$ . Для сил отталкивания знак  $A$  обратный.

Характер сил  $K$ - $N$  в настоящее время достоверно определен лишь для  $K^+$ - $\rho$  взаимодействия. В этом случае действуют силы отталкивания [55], так что  $Re A^{(+)} < 0$ . Относительно  $K^-$ - $\rho$  взаимодействия имеются указания, что между ними действуют силы притяжения [56]. Что касается нейтронов, то прямых данных нет, но можно с большим основанием считать, что знаки длин рассеяния в этом случае определяются также только знаком странности  $K$ -мезона.

Используя экспериментальные данные, мы можем теперь вычислить

$$Re A^{(+)}(\mu_K) = -\frac{966}{\mu_K}; \quad Re A^{(-)}(\mu_K) = \frac{1,18}{\mu_K}. \quad (17,8)$$

Интеграл

$$Y = \int_{\mu_K}^{\infty} q' \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\omega'^2 \mu_K^2} d\omega' = \int_{\mu_K}^{\infty} \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{q'} d\omega'$$

сходится /см. [32] / и равен

$$Y = \frac{8,24}{\mu_K^2}. \quad (17,9)$$

Таким образом,

$$Re [B^{(+)}(\mu_K) - B^{(-)}(\mu_K)] = -\frac{2,26}{\mu_K} \quad (17,10)$$

Наша задача состоит теперь в том, чтобы найти теоретическое выражение для  $B^{+} - B^{-}$ .

Прежде всего выясним, какие состояния могут дать вклад в области  $0 \leq \omega \leq \mu_K$ . Благодаря сохранению энергии-импульса имеет место уравнение

$$p_1 + q_1 = p_n; \quad M_n^2 = M_\pi^2 + M_K^2 + 2M_\pi \omega,$$

так что

$$M_\pi \leq M_\pi + M_K. \quad (17,11)$$

Этому неравенству удовлетворяют следующие состояния

$$| \Lambda \rangle, | \Sigma \rangle, | \pi \Lambda \rangle, | \pi \pi \Lambda \rangle \quad (17,12)$$

и поэтому только они должны учитываться при вычислении  $\mathcal{U}_m A^{(2)}$  в области  $0 \leq \omega \leq M_K$ . Для мнимой части  $A^{(2)}$  и эти состояния не дадут вклада: все реакции

$$K^+ + N \rightarrow \Lambda, \Sigma, \pi + \Lambda, \pi + \Sigma, \pi + \pi + \Lambda \quad (17,13)$$

запрещены сохранением странности. Поэтому

$$\mathcal{U}_m A^{(2)} = 0 \quad (\omega \leq M_K) \quad (17,14)$$

В  $\mathcal{U}_m A^{(2)}$  мы явно вычислим только вклад одночастичных состояний  $| \Lambda \rangle$  и  $| \Sigma \rangle$ .

$$\mathcal{U}_m A^{(2)} = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta(p_1 + q_1 - p_n) \langle p_2 q_2 | n \rangle^* \langle n | p, q \rangle. \quad (17,15)$$

$$\langle n | p, q \rangle = g_Y \bar{u}_Y(p_n) \Gamma_{UY}(p_n) \sqrt{\frac{M_Y}{\omega_Y}}$$

Вид матрицы  $\Gamma$  зависит от четности системы  $(KY)$  относительно протона: при  $P_K P_Y P_p = +1$ ,  $\Gamma = 1$ , при  $P_K P_Y P_p = -1$ ,  $\Gamma = i\gamma_5$ .

Вклад одного гиперона в мнимую часть находится теперь стандартным путем / ср. §§ 4,5,11/

$$\mathcal{U}_m A^{(2)} = \pi \sum_Y \int d^4 p_n \delta^4(p_1 + q_1 - p_n) g_Y^2 \frac{M_Y}{\omega_Y} \bar{u}_2 \Gamma_{UY}(p_n) \bar{u}_1(p_n) \Gamma_{UY}$$

$$= \pi g_Y^2 \int 2M_Y \delta(p_n^2 + M_Y^2) d^4 p_n \delta^4(p_1 + q_1 - p_n) \bar{u}_2 \Gamma \frac{-i\gamma^0 p_n + M_Y}{2M_Y} \Gamma u_1 =$$

$$= \pi g_V^2 \delta[(p_1 + q_1)^2 + M_V^2] \bar{u}_2 \bar{\Gamma} [-i \gamma^4 (p_1 + q_1) + M_V] \Gamma u_1. \quad (17,16)$$

Здесь  $\bar{\Gamma} = \gamma_4 \Gamma^* \gamma_4 = \Gamma$  при любом выборе четности. Переноса  $\Gamma$  через выражение в квадратных скобках, находим

$$\Gamma [-i \gamma^4 (p_1 + q_1) + M_V] \Gamma = -i \gamma^4 (p_1 + q_1) + M_V P_V P_K P_N.$$

В дальнейшем мы будем вместо  $M_V P_V P_K P_N$  писать просто  $M_V$ , имея в виду, что знак соответствующей четности включен в эту величину. Воспользовавшись уравнением Дирака, перепишем (17,16) в виде

$$\begin{aligned} \Upsilon_m A^{(-)} &= \pi g_V^2 \delta(M_V^2 - M_N^2 - M_K^2 - 2M_N \omega) (M_V + M_N + \omega) = \\ &= \pi \frac{g_V^2}{2M_V} (M_V + M_N + \omega) \delta(\omega - \omega_V); \quad \omega_V = \frac{M_V^2 - M_N^2 - M_K^2}{2M_N}. \end{aligned} \quad (17,17)$$

Одночастичная часть амплитуды приводится к виду

$$B_V^{(+)}(\omega) = \frac{f_V^2}{\omega_V \pm \omega}; \quad f_V^2 = g_V^2 \frac{(M_V + M_N)^2 - M_K^2}{4M_N^2}. \quad (17,18)$$

Случай рассеяния  $K^-$ -мезонов на нейтроне отличается особой простотой. Промежуточные состояния, связанные с  $|K^0 n\rangle$ , должны иметь отрицательный заряд. Среди одночастичных состояний этому условию удовлетворяет только  $|\Sigma^- \rangle$ , так что  $\Lambda^-$ -гиперон не дает вклада.

Вклады двух-частичных состояний мы не будем вычислять, так как это привело бы к необходимости решать предварительно задачу о рассеянии типа  $K^+ p \rightarrow \pi + Y$ . Вклад в мнимую часть от 2-частичных состояний начинается с пороговой энергии

$$W \geq M_\Lambda + M_\pi, \text{ т. е. } \omega \geq \omega_{\pi\Lambda} = \frac{(M_\Lambda + M_\pi)^2 - M_N^2 - M_K^2}{2M_N} \quad (17,19)$$

Таким образом,

$$B^{(\pm)}(\omega) = B_V^{(\pm)}(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{\pi L}}^{\omega_K} \frac{\text{Im} A^{(\pm)}(\omega') d\omega'}{\omega' \pm \omega} \quad (17,20)$$

где  $B_V$  - вклад одночастичного состояния, записанный в (17,18).

Чтобы найти  $B_V$  из  $B^\pm$ , необходимо еще вычислить интеграл по нефизической области. Для этого можно, например, экстраполировать оптическую теорему в нефизическую область, полагая

$$\text{Im} A^{(-)} = |q| \frac{q^{(-)}}{4\pi}; \quad |q| = \sqrt{M_K^2 - \omega^2} \quad (17,21)$$

Более точные методы экстраполяции были предложены Далитцем и Тванем [54], но пользоваться ими не обязательно, так как вообще вклад нефизической области сравнительно невелик. По нашим оценкам [57]

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_{\pi L}}^{\omega_K} \frac{\text{Im} A^{(-)}(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - M_K^2} = - \frac{5,60}{M_K^2} \quad (17,22)$$

Окончательный результат, вытекающий из (17,20), таков

$$B_\Sigma^{(+)}(M_K) - B_\Sigma^{(-)}(M_K) = \frac{1,30}{M_K} \quad (17,23)$$

так что <sup>19)</sup>

$$f_\Sigma^2 / 4\pi = -0,56 \pm 0,22 \quad (17,24)$$

<sup>19)</sup> Коэффициент  $\frac{1}{4\pi}$  возникает из-за того, что

$$f = -\frac{A}{4\pi}$$

где  $A$  - инвариантная амплитуда,  $f$  - амплитуда рассеяния вперед.

$$f = \frac{q^2}{q_c^2} f_c = \frac{W}{M} f_c = \frac{W}{M} \cdot \frac{e_1 e_2}{2\pi W} \sqrt{\frac{1}{2e_1^2 e_2^2}} A = -\frac{A}{4\pi M}$$

Отрицательный знак этой величины, согласно ее определению, (17,18) , означает, что

$$P_K P_\Sigma P_P = -1, \quad (17,25)$$

т.е. четность  $\Sigma$  -гиперона относительно системы (K-p) отрицательна. Из (17,24) следует, что

$$g_\Sigma^2/4\pi = 11 \pm 3. \quad (17,26)$$

Этот вывод о четности и константе связи совпадает с результатами работы [58], но использованный здесь метод более прост.

Заметим, что в работе [58] был получен вывод о противоположности четностей  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -гиперонов. Следовательно, данные этого параграфа позволяют утверждать, что четность  $\Lambda$  -гиперона положительна. Существенно заметить, что этот вывод расходится с определениями этой четности из других экспериментов.

На этом мы закончим рассмотрение сильных взаимодействий. Мы не касались теории нуклон - нуклонных взаимодействий, так как она гораздо сложнее, ввиду более сложных свойств симметрии нуклонов, и заметно меньше разработана. В стороне остались также вопросы общей теории поглощения K -мезонов, рождения странных частиц и гиперон-нуклонной связи. Рамки статьи не позволяют остановиться на этих интересных вопросах.

## Глава IV . СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Третий тип взаимодействия элементарных частиц слабое взаимодействие - характеризуется исключительно малой константой связи. Поэтому удается наблюдать вызванные им эффекты только в тех случаях, когда они не маскируются более интенсивными сильными или электромагнитными взаимодействиями. Практически такая возможность представляется только в том случае, когда изучаемая частица является свободной. Слабое взаимодействие ведет в этом случае к распаду частиц.

В исключительных случаях удается наблюдать также рассеяние, обусловленное слабым взаимодействием. В данной главе будут рассмотрены только распадные проявления слабого взаимодействия.

Таблица 1

Распады элементарных частиц

	Лептонные	Безлептонные (адронные)
Распады лептонов	$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$	-
Распады мезонов	$\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ $\rightarrow e + \bar{\nu}$ $K \rightarrow \mu + \bar{\nu}$	$\pi_0 \rightarrow 2\gamma$ $K \rightarrow 2\pi$ $K \rightarrow 3\pi$
Распады барьонов	$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}$	$\Lambda \rightarrow N + \pi$ $\Sigma \rightarrow N + \pi$ $\Sigma_0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ $\Xi \rightarrow \Lambda + \pi$



В таблице 1 сведено большинство известных в настоящее время распадов элементарных частиц /не указаны так называемые смешанные распады  $K$ -мезонов:  $K \rightarrow \mu + \bar{\nu} + \pi^0$  или  $K \rightarrow e + \bar{\nu} + \pi^0$  /. Для продуктов распада в таблице 1 указаны только символы - заряды должны определяться в каждом отдельном случае в соответствии с законом сохранения заряда. Так, например, распад  $\Lambda \rightarrow N + \pi$  может протекать двояким образом: как  $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$  и как  $\Lambda \rightarrow n + \pi^0$ . Вероятность этих двух ветвей распада, вообще говоря, различна.

Все нейтральные лептоны, образующиеся при распадах, мы обозначили одним символом  $\nu$  /или  $\bar{\nu}$  /. В этом содержится предположение, что существует только один вид нейтральных частиц - нейтрино. Строго говоря, это не обязательно /подробнее см. ниже/.

Даже беглый взгляд на таблицу распадов замечает две закономерности:

- а/ при распаде лептоны испускаются парами,
- б/ изо-спин в процессе распада не сохраняется /это утверждение равносильно несохранению странности/.

Открытие некоторых реакций распада сыграло в истории физики огромную, буквально революционную роль. В первую очередь это относится к  $\beta$ -распаду:  $\pi \rightarrow \mu + e + \bar{\nu}$ , открытому одновременно с  $\alpha$ - и  $\gamma$ -распадами А.Беккерелем. Изучение этого процесса позволило В.Паули в 1932 г. сделать предположение о том, что при  $\beta$ -распаде вместе с электроном вылетает нейтральная частица /сейчас ее называют антинейтрино  $\bar{\nu}$  /. Вместе с тем само открытие радиоактивных распадов показало - впервые в истории физики - что атом /как тогда его понимали/ имеет сложное строение.

Когда в результате изучения распада  $\mu$ -мезона оказалось, что он распадается на три частицы, то это сразу же поставило под сомнение идею Юкавы о ядерной природе мезона, так как это означало, что спин мезона

полуцелый, тогда как мезон Юкавы должен иметь целый спин. Только открытие Пауэллом  $\pi \rightarrow \mu$  распада пролило свет на истинное положение вещей.

Сравнение реакций  $K \rightarrow 2\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$  привело к открытию несохранения четности в слабых взаимодействиях.

Обнаруженное недавно  $\pi \rightarrow e$  превращение подтвердило идею универсальности слабого взаимодействия.

Этот список легко можно было бы продолжить, но и без того ясна большая роль распадных процессов в физике элементарных частиц.

## § 18. Универсальность слабого взаимодействия

Основной всех теоретических построений в анализе распадных процессов является идея Э.Ферми, выдвинутая им для объяснения  $\beta$ -распада [59]. Сущность этой идеи состоит в том, что матричный элемент взаимодействия, вызывающего распад, имеет 4-фермионную форму

$$\langle e\bar{\nu} | n\bar{p} \rangle \quad (18,1)$$

в отличие от элемента юкавского типа

$$\langle \pi N | N \rangle, \quad (18,2)$$

содержащего 3 частицы, одной из которых является бозон.

Матричный элемент (18,1) позволяет вычислить силы взаимодействия между нейтроном и протоном, возникающие в результате обмена парой лептонов. Это вычисление было впервые проведено Таммом и Иваненко [60]. Силы получились малыми, но этот расчет явился прообразом теории ядерных сил, предложенной позже Юкавой.

Впоследствии, в связи с открытием распадов мезонов, пришлось ввести в рассмотрение матричные элементы вида

$$\langle \mu\bar{\nu} | \pi \rangle. \quad (18,3)$$

Хотя их вид и отличается от 4-фермионного, но, как выяснилось позже, константы взаимодействия в обоих случаях оказываются близкими по порядку величины. Этот факт привел нескольких авторов [51] к мысли об универсальном характере взаимодействия Терми. К сожалению, эта мысль не могла быть оформлена математически ввиду различного вида матричных элементов /обзор попыток, сделанных в этом направлении, см. у Л.Мишеля [62] /. Мешало этому и дальнейшее усложнение, накопление новых фактов о разнообразных распадах мезонов.

Приблизительно в это время, но в другой связи, Терми и Янг выдвинули простую гипотезу, сводящую  $(18,3)$  к  $(18,1)$ . Они предположили, что  $\pi$ -мезон является связанной системой, состоящей из нуклона и антинуклона

$$\pi \rightleftharpoons N + \bar{N}. \quad (18,4)$$

Эта идея естественно смыкается с представлениями Юкавы о природе ядерных сил, так как реакция (18,4) эквивалентна реакции Юкавы

$$N \rightleftharpoons N + \pi. \quad (18,5)$$

Однако, более подробное рассмотрение вопроса о связи гипотетических сил, сил Терми-Янга, связывающих пару в  $\pi$ -мезон, с ядерными силами в настоящее время отсутствует /в основном из-за отсутствия решения задачи двух тел в случае сильного взаимодействия/.

С.Саката расширил гипотезу Терми-Янга на  $K$ -мезоны, предположив, что

$$K \rightleftharpoons N + \bar{L}. \quad (18,6)$$

Применение обеих гипотез в теории слабого взаимодействия было предложено Л.Окунем [63]. Представление о составной структуре мезонов позволяет свести все формы распадов к переходам между следующими состояниями

$$|\mu\bar{\mu}\rangle, |\mu\bar{\nu}\rangle, |\mu\nu\rangle, |e\bar{\nu}\rangle. \quad (18,7)$$

Идея универсальности утверждает, что константа взаимодействия, связывающего эти состояния, одна и та же. Изложение современной теории универсального слабого взаимодействия дано Фейнманом и Гелл-Манном [64]. Их работа дала толчок быстрому развитию этой теории, которое уже сейчас привело к синтезу большого числа фактов в единую стройную схему.

Из четырех состояний можно составить 16 матричных элементов, соответствующих как превращениям частиц, так и рассеянию их друг на друге, обусловленному слабой связью. Все эти 16 элементов образуют единое взаимодействие с общей константой связи, так что матричный элемент слабого взаимодействия может быть представлен в виде <sup>20)</sup>

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} j^* j, \quad (18,8)$$

$$j = |\mu\bar{\nu}\rangle + |\mu\bar{\mu}\rangle + |\mu\nu\rangle + |e\bar{\nu}\rangle. \quad (18,9)$$

/мы специализировали состояния  $|\mu\bar{\mu}\rangle$  и  $|\mu\bar{\nu}\rangle$  так, чтобы автоматически сохранялся электрический заряд — теперь он одинаков во всех состояниях, образующих суперпозицию (18,9).

Нетрудно уловить общие черты универсальной схемы. Состояния, входящие в (18,9), содержат пару барион — антибарион либо пару лептон — антилептон. Поэтому переходы между ними идут с сохранением лептонного и барионного чисел. Вместе с тем в этих переходах не сохраняется ни странность, ни изо-спин.

Заметим, что симметричная форма взаимодействия (18,8), приданная ему Фейнманом и Гелл-Манном, обусловлена введением в теорию, наряду с распадами, эффек-

<sup>20)</sup> В выражении (18,9) предполагается, что  $\mu^-$  является таким же лептоном, как и  $e^-$ . В противном случае следовало бы писать  $|\mu^+\nu\rangle$ .

тов рассеяния. Универсальные схемы, предлагавшиеся ранее, не имели такой симметрии именно из-за отсутствия таких эффектов.

Величина  $j$  называется слабым током. Произведение  $j^+ j$  можно изобразить таблица 2

Таблица 2

Самодействие слабого тока

	$\bar{p} \bar{r}$	$\bar{L} \bar{r}$	$\mu \bar{\nu}$	$e \bar{\nu}$
$\bar{p} \bar{r}$	$n + r \rightarrow n + r$			
$\bar{L} \bar{r}$	$K \rightarrow 2\pi, 3\pi$ $\Lambda \rightarrow p + \pi$ $n + r \rightarrow \Lambda + r$	$\Lambda + r \rightarrow \Lambda + r$		
$\bar{\mu} \bar{\nu}$	$\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$ $\mu + r \rightarrow n + \nu$	$K \rightarrow \mu + \bar{\nu} + (\pi)$ $\Lambda, \Sigma \rightarrow p + \mu + \bar{\nu}$	$\mu + \nu \rightarrow \mu + \nu$	
$\bar{e} \bar{\nu}$	$n + r + e + \bar{\nu}$ $\pi \rightarrow e + \bar{\nu}$ $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$	$\Lambda, \Sigma \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ $K \rightarrow e + \bar{\nu} + \pi$	$\mu + e + \nu + \bar{\nu}$	$e + \nu \rightarrow e + \nu$

В ней в соответствии с составной моделью элементарных частиц /т.е. гипотезами Ферми-Янга и Сакаты/ не делается различия между системой  $(N\bar{N})$  и  $\pi$ -мезоном или  $(N\bar{N})$  и  $K$ -мезоном. Более того, каждое из этих состояний может дополнительно испустить еще несколько  $\pi$ -мезонов, если только это допустимо законами сохранения, действующими в сильных взаимодействиях /в частности, сохранением изоспина и странности/.

Отметим, что наряду с предсказанием "слабого" рассеяния /пока еще не наблюдаемого/ универсальная теория показывает, что наряду с  $\beta$ -распадом, вследствие гипотезы Ферми-Янга должен существовать и  $\beta$ -распад  $\pi$ -мезона:  $\pi \rightarrow e + \bar{\nu}$  <sup>21)</sup> Этот вывод теории был действительно подчеркнут Фейнманом и Гелл-Манном, и этот распад был действительно обнаружен после опубликования их работы. Благодаря универсальности слабого взаимодействия можно переносить свойства, открытые в одном виде распада, на другие виды. Поучительна в этом отношении история открытия несохранения четности.

Первое подозрение о возможности нарушения закона сохранения четности в процессе распада возникло при сравнении распадов  $K \rightarrow 2\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$ . Длительное изучение показало, что четности конечных состояний в этих двух процессах противоположны. Предположение о том, что существует два вида  $K$ -мезонов с различной четностью вскоре было отвергнуто, после чего оставалось только одно объяснение - несохранение четности, которое и было выдвинуто Т.Д.Ли и Янгом.

Однако, экспериментальная проверка этого предположения была проведена не на  $K$ -мезонах, а на более привычном и легче воспроизводимом явлении  $\beta$ -распада и распада  $\mu \rightarrow e$ . В результате проверки /опыты Ву и

<sup>21)</sup> По существу, эта идея руководила еще Юкавой, когда он строил теорию ядерных сил и  $\beta$ -распада, сводя оба явления к свойствам мезона.

Ледермана [65] / идея Ли и Янга была подтверждена, причем оказалось, что матричные элементы, соответствующие переходу, не сохраняющему четность, имеют такую же величину, как и матричные элементы, сохраняющие ее (2), то есть например

$$\langle e \bar{\nu} | \gamma_5 \rangle \sim \bar{u}_e 0 (1 \pm \gamma_5) u_\nu \cdot \bar{u}_\nu 0 u_e. \quad (18,10)$$

Знак перед  $\gamma_5$  был определен экспериментально и оказался положительным.

Объяснение этого факта было дано Ли, Янгом, Ландау и Саламом. Оно состоит в том, что нейтрино есть частица с определенной спиральностью, то есть

$$\gamma_5 u_\nu = u_\nu. \quad (18,11)$$

Благодаря этому можно писать

$$u_\nu = \frac{1 + \gamma_5}{2} u_\nu. \quad (18,12)$$

Иначе говоря, только те две компоненты биспинора  $u_\nu$ , для которых  $\langle \gamma_5 \rangle = +1$ , описывают нейтрино. В этом смысле и говорят о так называемом 2-компонентном нейтрино.

Это решило старый спор о массе нейтрино. У частицы с определенной спиральностью масса покоя тождественно исчезает, так как уравнение (18,11) совместно с уравнением Дирака только при  $m=0$ . Из (18,11) и

$$(\not{p} \cdot \gamma) u_\nu = 0 \quad (18,13)$$

следует, что

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u_\nu = -S u_\nu, \quad (18,14)$$

т.е. спиральность нейтрино  $S = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$  отрицательна.

Равенство нулю массы покоя нейтрино вытекает также из физического смысла спиральности /ср. аналогичное ут-

22) Поэтому в (18,8) введен множитель  $1/\sqrt{2}$ , чтобы  $G$  имела ту же величину, которая принималась до открытия несохранения четности.

верждение в § 3, стр. 24,25/.

Успех гипотезы 2-компонентного нейтрино, объяснившей несохранение четности в лептонных распадах, сделал еще более загадочным несохранение четности в безлептонных распадах.

Фейнман и Гелл-Манн подчеркнули, что равенство матричных элементов, сохраняющих и не сохраняющих четность, может рассматриваться как проявление общего закона сохранения спиральности в слабом взаимодействии /см. работу А.Салама в [65]/, согласно которому замена

$$u \rightarrow \gamma_5 u \quad (18,15)$$

не нарушает вида матричного элемента. Поскольку это требование в равной мере относится и к лептонным и к безлептонным распадам, оно объясняет несохранение четности во всех распадах и в то же время утверждает, что в распадных явлениях все частицы входят только своими двумя компонентами.

Из (18,15) вытекает общий вид матричного элемента слабого взаимодействия, так как из 16 линейно-независимых матриц, которые можно составить из матриц Дирака

$$1; \gamma_\mu; \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu; \gamma_5 \gamma_\mu; \gamma_5 \quad (18,16)$$

только две удовлетворяют этому требованию

$$\gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu \quad (18,17)$$

Таким образом, общий вид матричного элемента таков

$$\bar{u} (a \gamma_\mu + b \gamma_5 \gamma_\mu) u \quad (18,18)$$

/вообще говоря, к этому выражению следует добавить и другие векторы и псевдовекторы, которые можно составить из матриц Дирака и импульсов взаимодействующих частиц/.



Для тех элементов, в которые входит нейтрино, благодаря (18,11), должно удовлетворяться равенство

$$\bar{u}(a\gamma_\mu + b\gamma_5\gamma_\mu)u_\nu = \bar{u}[-\gamma_5(a\gamma_\mu + b\gamma_5\gamma_\mu)]u_\nu, \quad (18,19)$$

из которого вытекает, что в матричных элементах, содержащих  $u_\nu$ ,

$$a = -b. \quad (18,20)$$

Поэтому взаимодействие, отвечающее требованиям сохранения спиральности и двух-компонентности нейтрино, является взаимодействием типа  $V-A$ . Знак  $-$  перед аксиалом полностью обусловлен отрицательной спиральностью нейтрино.

## § 19. Распад $\mu$ -мезона

Превращение  $\mu$ -мезона в электрон

$$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu} \quad (19,1)$$

описывается амплитудой превращения

$$S = i(2\pi)^4 \delta(p-k-q_1-q_2) M, \quad (19,2)$$

где матричный элемент

$$M = \langle e\bar{\nu} | \mu \bar{\nu} \rangle \quad (19,3)$$

содержит нейтрино как в начальном, так и в конечном состояниях, и потому имеет наиболее простой вид, указанный в предыдущем параграфе. Благодаря этому расчет этого явления проводится наиболее просто

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_e O_\alpha u_\mu \cdot \bar{\nu}_2 O_\alpha u_\mu \sqrt{\frac{m_\mu m_\nu^2}{E_e E_\mu E_\nu}} \quad (19,4a)$$

$$O_{\alpha} = \gamma'_{\alpha} (1 + \gamma_5). \quad (19,4)$$

Мы сохраняем здесь и в других формулах массу нейтрино  $m_\nu$ , для того, чтобы пользоваться применявшейся ранее нормировкой спиноров. В окончательном результате масса нейтрино будет положена равной нулю, как следует быть.

Вероятность распада в единицу времени равна

$$dN = (2\pi)^4 \delta(p - k - q_1 - q_2) |M|^2 \frac{d\vec{k} d\vec{q}_1 d\vec{q}_2}{(2\pi)^9}. \quad (19,5)$$

Поскольку в опытах по распаду  $\mu$ -мезона поляризации и импульсы обоих нейтрино не измеряются, то выражение (19,5) следует просуммировать по этим переменным.

Если, кроме того, не фиксировать поляризацию электрона, то следует просуммировать и по ней, а для неполяризованных мезонов еще и усреднить по поляризации начального состояния. Сделаем это подробно; впоследствии рассмотрим влияние поляризаций. Итак,

$$\begin{aligned} dN &= \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^5} \frac{m\mu}{E_e E_\mu} \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \delta(p - k - q_1 - q_2)}{E_1 E_2} m_\nu^2 \frac{G^2}{2} \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \bar{u}_e O_\alpha u_\mu \cdot \\ &\cdot \bar{u}_2 O_\alpha u_\mu \cdot \bar{u}_\mu O_\beta u_2 \cdot \bar{u}_1 O_\beta u_e = \\ &= \frac{G^2 m \mu d\vec{k}}{4(2\pi)^5 E_e E_\mu} \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2}{E_1 E_2} \delta(p - k - q_1 - q_2) m_\nu^2 S_p O_\alpha \frac{-i\hat{q}_1 + m_\nu}{2m_\nu} O_\beta \frac{-i\hat{k} + m}{2m} \cdot \\ &\cdot S_p O_\alpha \frac{-i\hat{p} + \mu}{2\mu} O_\beta \frac{-i\hat{q}_2 + m_\nu}{2m_\nu} = \\ &= \frac{G^2}{64(2\pi)^5} \frac{d\vec{k}}{E_e E_\mu} \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2}{E_1 E_2} \delta(q_1 + q_2 - q) A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}. \quad (19,6) \end{aligned}$$

Здесь

$$q = p - \kappa \quad (19,7)$$

$$A_{\alpha\beta} = S_{\mu} O_{\alpha}(-i\hat{q}_1) O_{\beta}(-i\hat{k} + m); \quad B_{\alpha\beta} = S_{\mu} O_{\alpha}(-i\hat{p} + \mu) O_{\beta}(-i\hat{q}_2), \quad (19,8)$$

Вычисляя шпуры  $A_{\alpha\beta}$  и  $B_{\alpha\beta}$ , получим /ср. § 21, стр.155 /:

$$A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = 256 (pq_1)(\kappa q_2). \quad (19,9)$$

Таким образом, все сводится к вычислению интеграла

$$dN = \frac{G^2}{8\pi^5} \frac{d\vec{x}}{E_1 E_2} \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2}{E_1 E_2} \delta^4(q_1, q_2 - q) (pq_1)(\kappa q_2). \quad (19,10)$$

Очевидно,

$$\int \frac{d\vec{q}_1}{E_1} \frac{d\vec{q}_2}{E_2} \delta^4(q_1, q_2 - q) q_{15} q_{20} = \alpha q^2 \delta_{50} + \beta q_5 q_0, \quad (19,11)$$

так как иных тензоров второго ранга в нашем распоряжении нет. Из (19,11) следуют два уравнения

$$\int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \delta(q_1, q_2 - q) (q_1 q_2) / E_1 E_2 = q^2 (4a + b) \quad (19,12)$$

$$\int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \delta(q_1, q_2 - q) (q_1 q) (q_2 q) / E_1 E_2 = q^4 (a + b).$$

Но, благодаря наличию  $\delta$ -функции,  $q_1, q_2 = q$ , так что

$$(q_1, q_2) = (q, q) = (q_2, q) = q^2/2. \quad (19,13)$$

Поэтому

$$4a + b = J/2; \quad a + b = J/4. \quad (19,14)$$

где

$$J = \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2}{E_1 E_2} \delta^4(q_1, q_2 - q). \quad (19,15)$$

Этот интеграл - инвариант, и мы вычислим его в системе, где  $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$  /поэтому  $E_1 = E_2$ /

$$J = \int \frac{d\vec{q}_1}{E_1^2} \delta(E_1 + E_2 - q_0) = \int \frac{4\pi E_1^2 dE_1}{E_1^2} \delta(2E_1 - q_0) = 2\pi. \quad (19,16)$$

Теперь с помощью (19,14) находим

$$a = \pi/6; \quad \theta = \pi/3 \quad (19,17)$$

и

$$dW = \frac{G^2}{48\pi^4} \frac{d\vec{k}}{E_k E_\mu} \left[ q^2(\mu k) + 2(\mu q)(kq) \right]. \quad (19,18)$$

Это выражение явным образом зависит от выбора системы отсчета из-за наличия  $1/E_k / d\vec{k}/E_k$  - инвариант/. Вероятность распада максимальна в системе покоя  $\mu$ -мезона и уменьшается с ростом энергии. Это совершенно естественно в релятивистской теории, где время замедляется с ростом энергии. Кстати, именно при измерении времени жизни  $\mu$ -мезона впервые экспериментально наблюдалось релятивистское замедление времени [66].

Вычислим вероятность распада в системе покоя  $\mu$ -мезона 23). В ней

$$q^2 = (\mu - k)^2 = \mu^2 - k^2 - 2\mu k = \mu^2 + 2\mu E_k \quad (19,19)$$

$$\mu \cdot k = -\mu E_k; \quad \mu \cdot q = \mu^2 - \mu k = \mu^2 + \mu E_k; \quad kq = \mu k - k^2 = -\mu E_k$$

/в этих выражениях пренебрегается массой электрона/

$$dW = \frac{G^2}{48\pi^4} \frac{E^2 dE d\Omega}{E_k} \left[ -\mu E(-\mu^2 + 2\mu E) + 2(\mu E - \mu^2)(-\mu E) \right] =$$

$$= (G^2 \mu^5 / 96\pi^3) (3 - 2E) E^2 dE (d\Omega / 4\pi), \quad (19,20)$$

---

23) Из  $q = \mu - k$  следует, что

$$q^2 = \mu^2 + k^2 - 2\mu k; \quad \mu q = \mu^2 - \mu k, \quad kq = \mu k - k^2, \quad \text{т.е.}$$

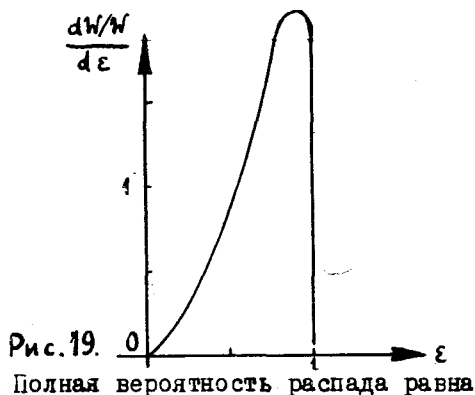
$$q^2(\mu k) - 2(\mu q)(kq) = (\mu^2 + k^2 - 2\mu k)(\mu k) + 2(\mu^2 - \mu k)(\mu k - k^2) =$$

$$= -2\mu^2 k^2 + 3(\mu k)(\mu^2 + k^2) - 4(\mu k)^2 =$$

$$= -2\mu^2 m^2 + 3\mu E(\mu^2 + m^2) - 4\mu^2 E^2$$

$$\varepsilon = E_e / (\mu/2) \quad (19,21)$$

$\mu/2$  - максимальная энергия электрона, возникающего при распаде/. На рисунке 19 изображен энергетический спектр электронов распада. Он имеет максимум в высокоэнергичной области. Угловое распределение изотропно.



$$W = \frac{G^2 \mu^5}{192 \pi^3} \quad (19,22)$$

а время жизни имеет величину

$$\tau = 1/W \quad .$$

Отсюда видно, что  $G$  - размерная величина

$$[G] = 1/(\text{масса})^2 \quad (19,23)$$

Зная  $\tau = (2,261 \pm 0,007) \cdot 10^{-6} \text{сек}$  из опыта, можно определить, чему равна  $G$ . Оказывается, что

$$G = (1,0 \pm 0,1) \frac{10^{-5}}{\text{м}^2} \quad (19,24)$$

где  $M$  - масса нуклона. Константа  $G$  носит имя Ферми, который впервые ввел ее в теорию [59].

Ему же принадлежит простая трактовка теории  $\beta$  - распада, в которой не учитывается матричный элемент, точнее, заменяется на постоянный. В нашем случае это означало бы, что

$$M = \frac{G\kappa^2}{\sqrt{E_e E_\mu E_\nu}} \quad (19,25)$$

и тогда

$$dW' = \frac{d\kappa^2}{\kappa E_e} \frac{G^2 \kappa^4}{(2\pi)^5} \int \frac{d\vec{q}_1 d\vec{q}_2}{E_1 E_2} \delta(q_1 + q_2 + \kappa - p) = \frac{G^2 \kappa^5}{16\pi^3} \cdot \epsilon d\epsilon \frac{d\delta^2}{4\pi} \quad (19,26)$$

Энергетический спектр в такой упрощенной трактовке получается линейным по  $\epsilon$ . Это несколько огрубляет истинное положение вещей /см. рис. 19/, но является хорошим приближением. Полная вероятность распада равна

$$W' = G^2 \kappa^5 / 32 \pi^3, \quad (19,27)$$

т.е. в 6 раз больше истинной.

В своей научной деятельности Ферми не раз использовал приближение постоянного матричного элемента - большое число примеров он сам приводит в книге [67]. Одна из таких попыток приобрела особенно большую известность - это трактовка образования мезонов на основе одного лишь статистического веса, без учета матричного элемента /так называемая статистическая теория образования мезонов/. За неимением лучшего в теории рождения частиц в настоящее время используется и это приближение.

Разберем теперь распад поляризованного мезона. В этом случае уже нельзя усреднять по поляризациям, но свести задачу к шпурам все-таки можно. Для этого мы используем соотношение Мишеля-Вайтмана /см. напр. [8], стр. 90 /

$$\sum_{\text{пол}} u(\mu) \bar{u}(\mu) = \frac{-i\hat{\mu} + \mu}{2\mu} \cdot \frac{1 + i\gamma_5 \hat{S}}{2} \quad (19,28)$$

Здесь  $S_\mu$  - вектор поляризации. Так же, как у фотона, он удовлетворяет уравнению

$$S \cdot \mu = 0, \quad (19,29)$$

которое очевидно в системе покоя частицы, так как у поляризации нет четвертой компоненты <sup>24)</sup>. Если просуммировать по двум значениям  $S = \pm 1$ , то (19,28) сведется к (4,17).

Благодаря (19,28) вероятность распада записывается в прежнем виде (19,6), но только

$$B_{\alpha\beta} = S_\mu O_\alpha (-i\hat{\mu} + \mu) (1 + i\gamma_5 \hat{S}) O_\beta (-i\hat{q}_\alpha). \quad (19,30)$$

Произведение  $A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$  оказывается равным

$$A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = 256 (kq_2) (\mu \cdot q_1 - \mu S q_1). \quad (19,31)$$

Мы получили, наряду с прежним  $256 (kq_2) (\mu q_1)$ , дополнительное слагаемое  $-256 \mu (kq_2) (S q_1)$ . После интегрирования по  $q_1, q_2$  это даст

$$\begin{aligned} dW &= \frac{G^2}{48\pi^4} \frac{d\vec{k}}{\mu E} (q^2 \delta_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) (\mu_\mu k_\nu - \mu S_\mu k_\nu) = \\ &= \frac{G^2 \mu^5}{96\pi^3} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \varepsilon^2 d\varepsilon \left[ 3 - 2\varepsilon - \frac{1}{\mu^2} (q^2 (s\kappa) + 2(sq)(q\kappa)) \right]. \end{aligned}$$

Но

$$S \cdot q = S \cdot (\mu - \kappa) = -S \cdot \kappa = -\vec{S} \vec{\kappa}, \quad (19,32)$$

<sup>24)</sup> Из (19,29) с помощью преобразования Лоренца следует, что если частица имеет импульс  $\vec{k}$ , то  $S_0 = (\vec{S} \vec{k}) / m$ .

так что

$$dW = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Omega}{2\pi} \varepsilon^2 d\varepsilon \left[ 3 - 2\varepsilon - \frac{3\vec{k}}{\mu^2} (2\mu E - \mu^2 + 2\mu E) \right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Omega}{2\pi} \varepsilon^2 d\varepsilon \left[ 3 - 2\varepsilon + 3\vec{n} (1 - 2\varepsilon) \right] \quad (19,33)$$

/здесь  $\vec{n} = \vec{k}/E$  - единичный вектор направления вылета электрона/.

В рассматриваемом случае изотропия углового распределения нарушается. Электроны распределены анизотропно: малоэнергичные  $1/\varepsilon < 1/2$  летят в основном вперед, т.е. по направлению спина мезона, а высокоэнергичные - назад.

Такой характер углового распределения очевиден с точки зрения сохранения спиральности, импульса и момента. При малой энергии электрона импульсы  $\nu$  и  $\bar{\nu}$  противоположны по направлению, а спины поэтому параллельны. Поэтому спин электрона должен иметь противоположное к ним направление, а сам он - вследствие отрицательной спиральности - должен двигаться по спину мезона. При большой энергии дело обстоит наоборот.

Общий вид углового распределения при любой энергии получается из (19,33) интегрированием по  $\varepsilon$ :

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3 - 3\vec{n}}{6\tau} \quad (19,34)$$

Отсюда степень асимметрии получается зависящей от поляризации  $\mu$ -мезона:

$$P = 2 \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = -\frac{5}{3} \quad (19,35)$$

Наличие асимметрии целиком обусловлено отрицательной спиральностью  $\mu$ -мезона. Поэтому подтверждение этого вывода теории в опыте Ледермана является в то же



время прямым доказательством сохранения спиральности в слабом взаимодействии.

Интересно отметить, что если бы распад  $\mu$ -мезона шел по схеме

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu} + \bar{\nu}, \quad (19,36)$$

то зависимость асимметрии от энергии была бы противоположной. В этом можно убедиться, рассматривая корреляции спинов и импульсов, подобно сделанному выше. Это значит, что в этом случае спиральность  $\mu$ -мезона была бы положительной, а сам он был бы антилептоном. Тогда вместо (19,4а) мы имели бы

$$M' = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_e O_\alpha u_\mu \cdot \bar{u}_\mu O_\alpha u_e \sqrt{\frac{m_\mu m_e^2}{E_e E_\mu E_1 E_2}}. \quad (19,37)$$

Сравнивая расчеты, основанные на этом матричном элементе, с теми, которые мы провели выше, легко заметить, что разница состоит в замене  $\beta_{\mu p} \rightarrow \beta_{\mu k}$ . Благодаря этому получается

$$A_{\mu p} B_{\mu k} = 256 (q_1 q_2) (\mu \cdot k - m_\mu^2) \approx 256 (q_1 q_2) (\mu k).$$

Подставив  $(q_1 q_2 / \mu k)$  вместо  $(\mu q_1 / k q_2)$  и проинтегрировав по  $q_1, q_2$ , получим

$$\begin{aligned} dW &= \frac{G^2}{48\pi^4} \frac{d\vec{k}}{\mu E} (\mu k) (4q^2 + 2q^2) = \frac{G^2}{8\pi^4} \frac{d\vec{k}}{\mu E} (\mu k) q^2 = \\ &= \frac{G^2}{2\pi^3} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} (\mu^2 - 2\mu E) E^2 dE = \frac{G^2 \mu^5}{16\pi^3} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} (1-\epsilon) \epsilon^2 d\epsilon. \end{aligned} \quad (19,38)$$

Этот спектр заметно отличается от (19,20) лишь в области  $\epsilon \approx 1$ , где эксперимент очень сложен, так как само число электронов с такой энергией невелико. Полная вероятность распада, рассчитанная с помощью (19,38), совпадает с (19,22). Поэтому измерение време-

ни жизни не позволяет решить, является ли  $\mu$ -мезон лептоном или антилептоном, хотя прецизионные измерения спектра дали бы ответ на этот вопрос.

Отметим, что квадрат модуля матричного элемента линейно содержит  $\varepsilon$ , так что при любом виде слабой связи

$$\frac{dN}{N} = A(B - \varepsilon)\varepsilon^2 d\varepsilon \quad (19,39)$$

Постоянная нормировки  $A$  равна

$$A = \left(\frac{B}{3} - \frac{1}{4}\right)^{-1}$$

и поэтому

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon} = 3 \frac{B - \varepsilon}{B - \frac{3}{4}} \varepsilon^2 d\varepsilon, \quad (19,40)$$

т.е. все различие в спектрах сводится к различию в величинах параметра  $B$ . Однако, при любом  $B$  кривые энергетических спектров проходят через точку  $\varepsilon = 3/4$ . Различия в  $B$  существенны лишь при  $\varepsilon > \frac{3}{4}$ , где как раз велики экспериментальные трудности.

Часто характеризуют спектр, задавая так называемый параметр Мишеля

$$\rho = \frac{3}{8} A(B - 1). \quad (19,41)$$

Рассмотренные нами случаи соответствуют  $\rho = 3/4$  и  $0$ .

В заключение изучим поляризацию электрона распада. Очевидно, если электрон поляризован, то

$$A_{\alpha\beta} = S_{\beta} O_{\alpha}(-i\hat{q}_1) O_{\beta}(-i\hat{k} + m)(1 + i\gamma_5 \hat{\xi}) \quad (19,42)$$

и повторяя почти дословно те же вычисления, найдем

$$A_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = 128(\rho q_1)(k q_2 - m \xi \cdot q_2). \quad (19,43)$$

После интегрирования по  $q_1, q_2$  это дает

$$\begin{aligned} dW &= \frac{G^2}{96\pi^4} \frac{d\vec{k}}{\mu E} \mu \mu (\kappa, -m\xi, \nu) (q^2 \delta_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) = \\ &= \frac{G^2}{96\pi^4} \frac{d\vec{k}}{\mu E} [q^2(\mu\kappa) + 2(\mu q)(\kappa q)] \left[ 1 - m \frac{q^2(\mu\xi) + 2(\mu q)(q\xi)}{q^2(\mu\kappa) + 2(\mu q)(\kappa q)} \right] \end{aligned} \quad (19, 44)$$

Итак, различие состоит в появлении дополнительного множителя

$$M_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - m \frac{q^2(\mu\xi) + 2(\mu q)(q\xi)}{q^2(\mu\kappa) + 2(\mu q)(\kappa q)} \right]. \quad (19, 45)$$

Но  $\xi \cdot \kappa = 0$  и поэтому  $(q\xi) = (\mu\xi)$ . Кроме того,  $(q\kappa) = (\mu\kappa)$ ,

$$M_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - m \frac{(\mu\xi)}{(\mu\kappa)} \right] \quad (19, 46)$$

и если воспользоваться примечанием к стр. 140, то получится

$$M_e = \frac{1 - v \xi \vec{\pi}}{2}, \quad (19, 47)$$

т.е. электрон при  $v \rightarrow 1$  полностью поляризован против импульса /при  $\vec{\xi} \parallel \vec{\pi}$   $M_e = 0$ /. Это снова выражает отрицательную спиральность электрона, как и всех других частиц, участвующих в процессе слабого взаимодействия.

Запишем для справок полное выражение вероятности распада  $\mu$ -мезона /нейтрино не измеряются/ [58]

$$dW = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\Omega}{2\pi} \cdot \frac{1 - \xi \vec{\pi}}{2} \varepsilon^2 d\varepsilon [3 - 2\varepsilon + 3\vec{\pi}(1 - 2\varepsilon)]. \quad (19, 48)$$

## § 20. Распад $\pi$ -мезона

### Преобразование

$$\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu} \quad (20,1)$$

рассмотрим сначала феноменологически, вводя матричный элемент

$$S = i(2\pi)^4 \delta(p-k-q) \langle \mu \bar{\nu} / \pi \rangle, \quad (20,2)$$

амплитуда которого из соображений релятивистской инвариантности и сохранения спиральности может быть представлена в виде

$$\langle \mu \bar{\nu} / \pi \rangle = F p_\alpha \bar{u}_\mu \gamma_\alpha u_\nu \sqrt{\frac{\mu m_\nu}{2E_\pi E_\mu E_\nu}}. \quad (20,3)$$

Впоследствии мы рассмотрим вывод этого выражения с точки зрения универсальной теории Фейнмана-Гелл-Манна и сумеем выразить  $F$  через  $G$ .

Прежде всего упростим амплитуду (20,3) с помощью уравнения Дирака

$$p_\alpha \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_\nu = \bar{u}_\mu (\hat{k} + \hat{q}) (1 + \gamma_5) u_\nu = i \bar{u}_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu, \quad (20,4)$$

после чего получаем

$$S = i(2\pi)^4 \delta(p-k-q) i F_\mu \bar{u}_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu \sqrt{\frac{\mu m_\nu}{2E_\pi E_\mu E_\nu}}. \quad (20,5)$$

Вероятность распада в единицу времени находится обычным образом:

$$dN = (2\pi)^4 \delta(p-k-q) F^2 \mu^2 \frac{\mu m_\nu}{2E_\pi E_\mu E_\nu} \frac{d\vec{k} d\vec{q}}{(2\pi)^6} \bar{u}_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu \cdot \bar{u}_\nu (1 - \gamma_5) u_\mu. \quad (20,6)$$

Просуммируем по поляризациям нейтрино, но учтем поляризацию  $\mu$ -мезона

$$\begin{aligned} \bar{u}_\mu(1+\gamma_5)u_\nu \cdot \bar{u}_\nu(1-\gamma_5)u_\mu &\rightarrow S_\mu(1+\gamma_5) \frac{-i\hat{q}}{2m_\mu} (1-\gamma_5) \frac{-i\hat{k}+\mu}{4\mu} (1+i\gamma_5\hat{S}) = \\ &= \frac{1}{4\mu m_\mu} S_\mu \hat{q}(-\hat{k}-i\mu)(1+i\gamma_5\hat{S})(1+\gamma_5) = -\frac{(q\kappa)+\mu(qs)}{\mu m_\mu}. \end{aligned} \quad (20,7)$$

Таким образом,

$$dW = \frac{\delta(p-k-q)d\vec{k}d\vec{q}}{(2\pi)^2} \cdot \frac{F^2\mu^2}{2E_\pi E_\mu E_\nu} \left[ -(q\kappa) - \mu(qs) \right]. \quad (20,8)$$

Величина вероятности распада и здесь зависит от выбора системы отсчета /ср. § 19/. Мы вычислим ее в системе покоя  $\pi$ -мезона. При этом учтем, что, благодаря сохранению 4-импульса,  $p = q + k$ , из  $s \cdot k = 0$  следует

$$s \cdot q = s \cdot p = -ms_0 = -\frac{m}{\mu} \vec{s} \cdot \vec{k} \quad (20,9)$$

Кроме того,

$$q \cdot k = q \cdot p = -mE_\nu = -m|\vec{q}| = -m|\vec{k}|, \quad (20,10)$$

так что окончательно

$$dW = \frac{\delta(p-k-q)d\vec{k}d\vec{q}}{(2\pi)^2} \cdot \frac{F^2\mu^2}{2E_\pi E_\nu} |\vec{k}|(1+\vec{s} \cdot \vec{n}) \quad (20,11)$$

$\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$  - единичный вектор в направлении движения  $\mu$ -мезона/.

Интеграл по импульсу нейтрино берется

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta(p-k-q)d\vec{q}}{2E_\nu} &= \int d^4q \delta(q^2) \delta(p-k-q) = \delta(p-k)^2 = \\ &= \delta(m^2 + \mu^2 - 2mE_\mu), \end{aligned} \quad (20,12)$$

после чего оказывается, что энергия  $\mu$ -мезона фиксирована /что вполне естественно, так как распад происходит на две частицы/. Интегрируя и по ней, находим

$$\int d\vec{k} \frac{|\vec{k}|}{E_k} \delta(m^2 + \mu^2 - 2mE_k) = \frac{|\vec{k}|^2 d\Omega}{2m}. \quad (20,13)$$

Здесь

$$|\vec{k}|^2 = E_k^2 - \mu^2 = \left(\frac{m^2 + \mu^2}{2m}\right)^2 - \mu^2 = \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{4m^2}. \quad (20,14)$$

Таким образом,

$$dN = \frac{F^2 \mu^2 (m^2 - \mu^2)^2}{32 \pi^2 m^3} (1 + \vec{s} \cdot \vec{n}) d\Omega. \quad (20,15)$$

Отсюда видно, что образующийся  $\mu$ -мезон полностью поляризован в направлении своего импульса. / $|\vec{s}| = 1$  /

$$\rho = 2 \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = 1. \quad (20,16)$$

Это обусловлено тем, что образующийся вместе с ним антинейтрино полностью поляризован вдоль своего импульса. Такая поляризация  $\mu$ -мезона называется "вынужденной": она обусловлена не характером спиральности  $\mu$ -мезона, а конкретным проявлением законов сохранения в данном процессе.

Полная вероятность распада после суммирования по поляризациям и интегрирования по углам получается равной

$$N_{\pi\mu} = \frac{F^2}{4\pi} \frac{\mu^2 (m^2 - \mu^2)^2}{m^3}. \quad (20,17)$$

Поскольку здесь неизвестна величина константы  $F$ , теория не может предсказать время жизни  $\pi$ -мезона.

Экспериментальная величина

$$\tau_{\pi} = (2,56 \pm 0,05) \cdot 10^{-8} \text{ сек} \quad (20,18)$$

получится, если положить

$$|F| = \frac{10^{-6}}{\mathcal{M}} \approx \frac{Gm}{\sqrt{2}} \quad (20,19)$$

Нетрудно видеть, что такие же выражения получились бы и в том случае, когда распад  $\pi$ -мезона происходил бы по схеме

$$\pi \rightarrow e + \bar{\nu} \quad (20,20)$$

При этом следовало бы только заменить  $\mu \rightarrow m_e$  и получить

$$\mathcal{W}_{\pi e} = \frac{F^2}{4\pi} \frac{m_e^2 (m^2 - m_e^2)^2}{m^3} \quad (20,21)$$

Хотя феноменологическая теория и не может утверждать, что электронный распад  $\pi$ -мезона действительно может происходить по схеме (20,20), тем не менее она позволяет определить отношение вероятностей этих двух ветвей распада

$$R = \frac{\mathcal{W}_{\pi e}}{\mathcal{W}_{\pi \mu}} = \frac{m_e^2 (m^2 - m_e^2)^2}{m_{\mu}^2 (m^2 - m_{\mu}^2)^2} = 13,6 \cdot 10^{-5} \quad (20,22)$$

Поиски электронного распада  $\pi$ -мезона проводились группой Андерсона [59], которой было установлено, что  $R < 10^{-5}$ . Это серьезное противоречие эксперимента и теории было особо подчеркнуто в основной работе Фейнмана-Гелл-Манна, что побудило экспериментаторов повторить опыт. В результате тщательной проверки оказалось [70], что  $\pi$ -е распад действительно существует и  $R > 4 \cdot 10^{-5}$ .

Заметим кстати, что распады  $K \rightarrow \mu + \bar{\nu}$  и  $K \rightarrow e + \bar{\nu}$

могут быть рассчитаны аналогичным образом. Разветвление в этом случае оказывается равным

$$R_K = \frac{M_{K\pi}^2}{M_{K\mu}^2} = \frac{m_\pi^2(m_K^2 - m_\pi^2)^2}{m_\mu^2(m_K^2 - m_\mu^2)^2} = 2,5 \cdot 10^{-5}, \quad (20,23)$$

т.е. случаи  $K \rightarrow e + \bar{\nu}$  встречаются относительно реже, чем случаи  $\pi \rightarrow e + \bar{\nu}$ . Не удивительно поэтому, что они до сих пор не наблюдались.

Рассмотрим теперь точку зрения универсальной теории на распад  $\pi$ -мезона. Прежде всего, благодаря симметрии  $|\mu\bar{\nu}\rangle$  и  $|e\bar{\nu}\rangle$ , электронный вид распада  $\pi$ -мезона присутствует с такой же необходимостью, как и  $\mu$ -мезонный, так что разветвление действительно может быть рассчитано по формуле (20,22). Согласие  $R_{теор}$  и  $R_{эксп}$  означает, что противоречия между предсказанной величиной и экспериментом более не существует.

Константа  $F$  может быть выражена через  $G$  [71]. Для этого необходимо из общего матричного элемента

$$M = \langle \mu\bar{\nu} | h\pi \rangle \quad (20,24)$$

выбрать ту часть, которая соответствует переходу  $\langle \mu\bar{\nu} | \pi \rangle$ . Чтобы сделать это, мы воспользуемся условиями аналитичности и унитарности. Будем рассматривать  $M$  как аналитическую функцию от

$$s = -p^2 = -(p_\pi + p_{\bar{\pi}})^2. \quad (20,25)$$

Тогда

$$M(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } M(s') ds'}{s' - s} \quad (20,26)$$

и можно написать условие унитарности

$$\text{Im } M = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_K \delta(p_K - p) \langle \mu\bar{\nu} | K \rangle \langle K | h\pi \rangle^* \quad (20,27)$$



Промежуточное состояние  $|K\rangle$  может содержать один или несколько  $\pi$ -мезонов. Одночастичный член  $|\pi\rangle$  дает ту часть матричного элемента, которая связана с  $\pi$ - $\mu$  распадом

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi\mu} &= \pi \int d\vec{r} \delta(\vec{r}_\pi - \vec{r}) \delta(\vec{r}_\pi - \vec{r}) i g \bar{u} \tau_+ \gamma_5 u \frac{1}{2\omega_\pi} = \\ &= \pi \delta(s - m_\pi^2) \langle \mu \bar{\nu} | \pi \rangle i g \bar{u} \tau_+ \gamma_5 u. \end{aligned} \quad (20,28)$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}_{\pi\mu} = \frac{i g \bar{u} \tau_+ \gamma_5 u}{m^2 - s} \langle \mu \bar{\nu} | \pi \rangle = \frac{i g \sqrt{2} \bar{u}_p \gamma_5 u_n}{m^2 - s} F_{\pi\alpha} \langle \mu \bar{\nu} | \alpha \rangle. \quad (20,29)$$

Но, по определению,

$$\mathcal{M} = \langle \mu \bar{\nu} | \mu \bar{\nu} \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_p (V_\alpha + A_\alpha) u_n \langle \mu \bar{\nu} | \alpha \rangle.$$

Значит,

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_p (V_\alpha + A_\alpha) u_n = \frac{i g \sqrt{2} \bar{u}_p \gamma_5 u_n}{m^2 - s} F_{\pi\alpha}. \quad (20,30)$$

Чтобы найти  $F$ , необходимо спроектировать из нуклонного матричного элемента ту часть, которая имеет вид, указанный в правой стороне равенства. Для этого умножим (20,30) на  $p_\alpha$  и учтем, что справа стоит псевдоскаляр. Это значит, что вклад вектора должен исчезать

$$p_\alpha V_\alpha = 0. \quad (20,31)$$

Это - так называемый закон сохранения векторной части слабого тока. Впервые на важность этого соотношения указали Герштейн и Зельдович [72]. Благодаря аналогии между этим свойством и законом сохранения электрического тока, также являющегося вектором, можно утверждать, что у всех частиц константа векторного

взаимодействия одинакова и равна  $G$ . Конечно, это утверждение относится только к тем частицам, которые способны в сильных взаимодействиях переходить друг в друга, т.е. в конечном счете к нуклонам,  $\pi$ -мезонам и вообще "обычным" частицам. Благодаря сохранению странности в сильных взаимодействиях, группа странных частиц входит в них особняком, и к ней это утверждение не относится. Конечно, при наличии теории сильного взаимодействия можно было бы вычислить константы всех распадов, отправляясь от одной  $G$ , но в настоящее время это невозможно.

Псевдовекторная часть тока имеет общий вид

$$R_\alpha = a \gamma_\alpha \gamma_5 + i b (\not{p}_\rho - \not{p}_\pi) \gamma_5, \quad (20,32)$$

так что

$$\begin{aligned} \bar{u}_\rho \not{p}_\pi R_\alpha u_\pi &= \bar{u}_\rho [a (\not{p}_\pi - \not{p}_\rho) \alpha \gamma_5 - i b (\not{p}_\pi - \not{p}_\rho)^2 \gamma_5] u_\pi \\ &= \bar{u}_\rho \gamma_5 u_\pi (2iMa + ibs), \end{aligned} \quad (20,33)$$

причем мы воспользовались уравнениями Дирака для  $\bar{u}_\rho$  и  $u_\pi$ .

Итак,

$$(2Ma + bs) \frac{G}{\sqrt{2}} = - \frac{g^F \sqrt{2} m^2}{m^2 - s}. \quad (20,34)$$

Если здесь положить  $s = -(\rho_\pi - \rho_\rho)^2$ , то мы получим соотношение между константой распада  $\pi$ -мезона  $F$ , константой сильной связи  $g$  и константами  $a, b$ , описывающими превращение  $\pi \rightarrow \rho$  /т.е.  $\beta$ -распад/. При этом  $s = 0$  и получается, что

$$M G_\pi = -g^F. \quad (G_\pi = aG). \quad (20,35)$$

$G_A$  есть константа псевдсвекторного взаимодействия в  $\beta$ -распаде — так называемая константа Гамова-Теллера. Наиболее точные измерения [73] приводят к результату

$$a = 1,25 \pm 0,04. \quad (20,36)$$

Подставляя

$$g = \sqrt{4\pi(2M/m)^2 \cdot 0,08}, \quad (20,37)$$

найдем

$$F = -1,2 \frac{10^{-5}}{M} \frac{m/2M}{\sqrt{0,32\pi}} \approx -\frac{10^{-6}}{M}, \quad (20,38)$$

что приводит к прекрасному согласию с опытом

$$\tau_{\text{теор}} \approx 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}$$

Если в формуле (20,34) положить  $s = s_\mu = -(\mu_r + \mu_\mu)^2$ , то получится соотношение между константами  $a$ ,  $b$  для захвата  $\mu$ -мезона

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu \quad (20,39)$$

$$2Ma^{(\mu)} + b^{(\mu)}s^{(\mu)} = \frac{2Mat^2}{m^2 - s^{(\mu)}} \quad (20,40)$$

/  $F$  исключено с помощью (20,35) /.

Если в соотношении унитарности учесть двух-частичные члены, то это позволит найти амплитуду  $\langle e\bar{\nu}/\pi\pi^0 \rangle$ . Она выражается через фазы  $\pi N$ -рассеяния [25]. Наконец, промежуточное состояние  $|\pi N\rangle$  вызывает превращение  $\langle \mu\bar{\nu}/\pi\gamma \rangle$  с фазами фоторождения  $\langle \pi\gamma/\mu\bar{\nu} \rangle$  [26].

25) Иным путем этот процесс рассмотрен Зельдовичем [74].

26) Процесс  $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu} + \gamma$  рассчитывался в работах [75].

Аналогичное рассмотрение возможно и для  $K^-$ -мезона, причем интересно, что результат зависит только от амплитуды  $\langle K/\mu\bar{L} \rangle$ , но не от амплитуды  $\langle K/\mu\bar{\Sigma} \rangle$ . При наличии достоверных сведений о константах  $\beta$ -распада гиперонов это позволило бы найти константу сильной связи  $g_{K\mu}$  из вероятности  $K \rightarrow \mu$  распада.

Распад  $K \rightarrow \pi + \mu + \bar{\nu}$  уязвляется с процессом образования или рассеяния странных частиц  $\langle K\pi/\mu\bar{L} \rangle$ .

## § 21. $\beta$ -распад нейтрона

$\beta$ -распад радиоактивных ядер был открыт одновременно с  $\alpha$ - и  $\gamma$ -распадами, но теоретическое истолкование его было дано несколько позже. Одной из причин этого опоздания является то, что для объяснения этого явления теоретикам - впервые в истории - пришлось ввести в рассмотрение новую частицу, не наблюдавшуюся в эксперименте - антинейтрино. Тогда /1932 г/ это делалось не так легко. Например, теория позитрона, предсказывавшая наличие новой частицы, не была понята самим ее создателем.

Первая схема теории  $\beta$ -распада, основанная на представлении Паули о вылете антинейтрино

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \quad (21,1)$$

была предложена Ферми [59]. Верный своей идее, он дал общий контур теории с постоянным матричным элементом. Свойства матричного элемента он изучал лишь в связи с правилами отбора и пользовался при этом простейшим видом связи - векторным / по аналогии с электродинамикой/.

Дальнейшее развитие шло по пути поиска правильного варианта связи и определения соответствующих

констант. Эмпирические попытки в этом направлении поставлены на прочную основу лишь после открытия несохранения четности и провозглашения сохранения спиральности.

Мы принимаем на этой основе матричный элемент  $\beta$  -распада в виде

$$S = i(2\pi)^4 \delta(n-p-e-\nu) \sqrt{\frac{M^2 M_e m_\nu}{E_n E_p E_e E_\nu}} \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_p (V_\alpha + A_\alpha) u_n \bar{u}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_\nu.$$

Если бы нуклоны не обладали способностью к сильным и электромагнитным взаимодействиям, то и их спиральность сохранялась, и тогда функции  $V_\alpha, A_\alpha$  сводились бы к  $\gamma_\alpha, \gamma_\alpha \gamma_5$ . В реальном мире это не так, но ввиду отсутствия теории сильного взаимодействия, вычислить эти функции не удастся. Их общий вид таков

$$V_\alpha = \gamma_\alpha + d(p-n)_\alpha + e(p-n)_\beta \gamma_{\alpha\beta} \quad (21,3)$$

$$A_\alpha = a \gamma_\alpha \gamma_5 + b(p-n)_\alpha \gamma_5 + c(p-n)_\beta \gamma_{\alpha\beta} \gamma_5. \quad (21,4)$$

Можно показать, однако, что  $d=c=0$  /см.напр.[76]/. Первое из этих равенств является также следствием сохранения векторного тока  $(p-n)_\alpha V_\alpha = 0$  /см. § 20 /.

Коэффициенты  $a, b, c$  являются, вообще говоря, функциями  $(p-n)^2$ . Эта величина зависит от энергии протона, но изменяется, как и  $E_p$ , очень мало /от  $M_p$  до  $M_p + (M_n - M_p)^2 / 2M_n$ /. Поэтому можно считать их постоянными и, в первом приближении, даже пренебречь  $b, c$ , поскольку они умножаются на малую величину  $(p-n)_\alpha$ .

Тогда

$$\bar{u}_p (V_\alpha + A_\alpha) u_n = \bar{u}_p \gamma_\alpha (1 + a \gamma_5) u_n. \quad (21,5)$$

Дальнейший расчет мы проведем для свободного нейтрона аналогично теории  $\mu \rightarrow e$  распада:

$$dW = \frac{(2\pi)^4 \delta(n-p-e-\nu) d\vec{p} d\vec{e} d\vec{\nu}}{(2\pi)^9} \cdot \frac{M_p M_n M_e M_\nu}{E_p E_n E_e E_\nu} \cdot \frac{G^2}{2} \cdot \frac{1}{2} S_p \gamma_\alpha (1+a\gamma_5) \cdot$$

$$\cdot \frac{-i\hat{n} + M_n}{2M_n} \gamma_\beta (1+a\gamma_5) \cdot \frac{-i\hat{p} + M_p}{2M_p} S_p \gamma_\alpha (1+\gamma_5) \cdot \frac{-i\hat{\nu}}{2M_\nu} \gamma_\beta (1+\gamma_5) \cdot \frac{-i\hat{e} + M_e}{2M_e} \quad (21,6)$$

Задача сводится к вычислению шпуров:

$$1) S_p \gamma_\alpha (1+\gamma_5) (-i\hat{\nu}) \gamma_\beta (1+\gamma_5) (-i\hat{e} + M_e) = 2S_p (1+\gamma_5) \hat{\nu} \gamma_\beta (-\hat{e} - im) \gamma_\alpha =$$

$$(21,7)$$

$$= -2\nu_\beta e_\sigma S_p (1+\gamma_5) \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_5 = -8\nu_\beta e_\sigma (\delta_{\beta\sigma} \delta_{\alpha\alpha} - \delta_{\beta\sigma} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\alpha} \delta_{\sigma\sigma} + e_{\beta\sigma\alpha}).$$

$$2) S_p \gamma_\alpha (1+a\gamma_5) (-i\hat{n} + M_n) \gamma_\beta (1+a\gamma_5) (-i\hat{p} + M_p) = S_p (1+a\gamma_5) (-i\hat{n} + M_n) \cdot$$

$$(1+a\gamma_5) \gamma_\beta (-i\hat{p} + M_p) \gamma_\alpha = S_p (1+2a\gamma_5 + a^2) (-i\hat{n}) \gamma_\beta (-i\hat{p} + M_p) \gamma_\alpha + M_n (1-a^2) \cdot$$

$$S_p \gamma_\beta (-i\hat{p} + M_p) \gamma_\alpha = -4(1+a^2) (n_\beta p_\alpha + n_\alpha p_\beta - \delta_{\alpha\beta} n \cdot p) + 4M^2 (1-a^2) \delta_{\alpha\beta} -$$

$$- 8a n_\lambda p_\mu e_{\lambda\beta\mu\alpha}. \quad (21,8)$$

При умножении их воспользуемся формулами

$$M_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0, \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}, \quad (21,9)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\sigma} e_{\alpha\beta\lambda\mu} = 2(\delta_{\gamma\lambda} \delta_{\sigma\mu} - \delta_{\gamma\mu} \delta_{\sigma\lambda}) \quad (21,10)$$

и получим

$$32(1+a^2) \cdot 2[(\nu n)(e p) + (\nu p)(e n)] - 32M^2(1-a^2)(-2)(\nu e) + 64a\nu_\beta e_\sigma n_\alpha p_\mu \cdot$$

$$\cdot 2(\delta_{\beta\sigma} \delta_{\alpha\mu} - \delta_{\beta\mu} \delta_{\sigma\alpha}) = 64 \left\{ (1+a^2)^2 (\nu n)(e p) + (1-a^2)^2 (\nu p)(e n) + M^2(1+a^2)(\nu e) \right\}. \quad (21,11)$$

Вероятность распада приводится к виду

$$dW = \frac{G^2 \delta(p-n-e-\nu)}{(2\pi)^5 E_n} \frac{d\vec{p}}{E_p} \frac{d\vec{e}}{E_e} \frac{d\vec{\nu}}{E_\nu} \left\{ (1+a)^2 (v_n)(e_p) + (1-a)^2 (v_p)(e_n) + \right. \\ \left. + M^2 (1-a^2) (v_e) \right\}. \quad (21,12)$$

Пропорциональность вероятности  $1/E_n$  выражает эффект релятивистского замедления времени /ср. §§ 19,20 /. Зафиксируем систему, связав ее с нейтроном. Тогда

$$E_n = M, \quad (v_n) = -ME_\nu, \quad (e_n) = -ME_e.$$

Если, кроме того, пренебречь отдачей протона, то  $(e_p) = -ME_e$ ,  $(v_p) = -ME_\nu$ . Тогда

$$dW = G^2 (2\pi)^5 \delta(p-n-e-\nu) d\vec{p} d\vec{e} d\vec{\nu} \left[ 2(1+a^2) + (1-a^2) \frac{v \cdot e}{E_\nu E_e} \right] = \\ = G^2 (2\pi)^5 \delta(p-n-e-\nu) d\vec{p} d\vec{e} d\vec{\nu} \left[ 1 + 3a^2 + (1-a^2) \vec{\beta}_\nu \vec{\beta}_e \right]. \quad (21,13)$$

Таким образом, если  $|a| \neq 1$ , то должна наблюдаться угловая корреляция между электроном и нейтрино. Если фиксировать угол  $\theta$  между электроном и нейтрино, то наблюдаемое распределение этих углов будет иметь вид

$$dW/W d\cos\theta = (1 + \lambda \beta_e \cos\theta)/2 \quad (21,14a)$$

$$\lambda = \frac{1-a^2}{1+3a^2}. \quad (21,14b)$$

Фактически на опыте измеряют угол между направлениями движений протона и электрона, который связан с углом  $\theta$  законом сохранения импульса. Применяется и другой метод определения  $\lambda$  из опыта: по энергетическому распределению протонов при фиксированном угле  $\theta$ .  $\lambda$  входит в это распределение как параметр, но определить его экспериментально оказы-

вается очень трудно, так как для этого необходимы весьма точные измерения энергетического спектра протонов отдачи.

Действительно, из (21,14б) видно, что в случае  $a=0$  /чисто векторная связь/  $\lambda = 1$ , а при  $a \gg 1$  /чисто аксиальная связь/  $\lambda = -1/3$ . Можно показать, что для тензорной связи  $\lambda = +1/3$ , а для скалярной  $\lambda = -1$ . Следовательно, различить между аксиальной и тензорной связью можно, лишь достигнув точности, лучшей 30 %.

Одним из наиболее точных опытов к 1958 г. был опыт Рустеда и Руби [77] по отдаче в  $\beta$ -распаде  $He^6$ , который давал

$$\lambda = +0,34 \pm 0,09 \quad (21,15)$$

и приводил к выводу о тензорной связи.

В то же время не менее точные измерения корреляции на  $A_2^{35}$ , проведенные группой Аллена [78], приводили к результату

$$\lambda = \begin{cases} 0,85 \pm 0,12 \\ 0,93 \pm 0,14 \end{cases}, \quad (21,16)$$

говорившем в пользу векторной связи.

В совокупности это ведет к противоречию, так как смесь взаимодействий векторного и тензорного типа в результате интерференции привела бы к существенному искажению энергетического спектра [79], которого определенно не наблюдается на опыте. В работе Фейнмана-Гелл-Манна отмечалось также, что результат опыта Рустеда-Руби противоречит и идее универсальности слабого взаимодействия, так оправдавшей себя в объяснении распада  $\mu$ -мезона.

Противоречие было устранено в результате более тщательного анализа эксперимента, который привел к



обнаружению ошибки. Она была устранена в работе Германсфельда и др. [80], в которой корреляция  $e-\nu$  в распаде  $He^6$  получилась равной

$$\lambda = -0,39 \pm 0,05, \quad (21,17)$$

т.е. согласующейся с аксиальным вариантом.

Рассмотрим теперь энергетический спектр электронов. Согласно (21,13) он целиком определяется статистическим весом  $\delta(n, p, e, \nu) d\vec{r} d\vec{z} d\vec{v}$ . Это обстоятельство и предопределило успех первоначального наброска Ферми. Интегрируя по углам, находим  $|\Delta = \mathcal{M}_n - \mathcal{M}_p|$ :

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= G^2 (2\pi)^{-5} (1+3a^2) (4\pi)^2 \int \delta(E_e + E_\nu - \Delta) p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= G^2 (1+3a^2) / (2\pi^3) \cdot \int (\Delta - E_e)^2 p_e^2 dp_e, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{d\mathcal{H}}{dE_e} = G^2 \frac{1+3a^2}{2\pi^3} E_e (\Delta - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - \mathcal{M}_e^2}. \quad (21,18)$$

Полная вероятность распада равна

$$\mathcal{P} = 1/\tau = G^2 \frac{1+3a^2}{(2\pi)^3} F(\Delta). \quad (21,19)$$

$$F(\Delta) = \int_{\mathcal{M}_e}^{\Delta} E (\Delta - E)^2 \sqrt{E^2 - \mathcal{M}_e^2} dE. \quad (21,20)$$

В результате интегрирования получается

$$\begin{aligned} F(\Delta) = \mathcal{M}_e^5 \left\{ \frac{1}{30} (\delta^2 - 1)^{5/2} - \frac{1}{12} (\delta^2 - 1)^{3/2} - \frac{1}{4} (\delta^2 - 1)^{1/2} + \right. \\ \left. + \frac{\delta}{4} \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}) \right\} \end{aligned} \quad (21,21)$$

$$\delta = \Delta / \mathcal{M}_e.$$

Эта функция просто выглядит в предельных случаях

$$F(\Delta) = \begin{cases} \Delta^5/30, & \Delta \gg M_e \\ \frac{16\sqrt{2}}{105} M_e^5 (\delta-1)^{7/2}, & \Delta \approx M_e \end{cases} \quad (21,22)$$

В случае распада нейтрона

$$\begin{aligned} \Delta/M_e &= 2,5323 \\ F(\Delta) &= 0,474 \frac{\Delta^5}{30}. \end{aligned} \quad (21,23)$$

Этот результат позволяет найти из формулы (21,19) величину  $\alpha$ , так как время жизни свободного нейтрона в настоящее время известно достаточно хорошо [73]

$$\tau_n = (1011 \pm 26) \text{ сек} \quad 21,24$$

$$\alpha = 1,25 \pm 0,04. \quad (21,25)$$

Никакого теоретического объяснения этому отклонению  $\alpha$  от 1 нет. Конечно, поскольку аксиальный ток не сохраняется, то при включении сильных и электромагнитных взаимодействий его величина может заметно измениться, что и наблюдается, но провести эту идею в жизнь не удастся — нет соответствующей схемы расчета. Причина этого, естественно, кроется в отсутствии теории сильного взаимодействия.

Методика расчета  $\beta$ -распада, изложенная в этом параграфе, в основном остается той же и в применении к распадам ядер. Разница состоит в том, что вместо плоских волн пользоваться волновыми функциями нуклонов в ядре. Так как они неизвестны, то при-

ходится пользоваться различного рода моделями и приближениями, которые еще ждут своего обоснования.

Более подробно ряд вопросов, связанных с теорией слабого взаимодействия, изложен в лекциях Л.Б.Окуня [76], в которых можно также найти изложение теории распадов странных частиц.

## Приложение А

### КИНЕМАТИКА УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

1. Рассмотрим рассеяние частицы с массой  $m$  и энергией  $E$  на частице с массой  $M$ , покоящейся в лабораторной системе координат /л.с./. Угол рассеяния обозначим  $\vartheta$ , угол отдачи  $\varphi$ . Закон сохранения 4-импульса

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \quad (A,1)$$

позволяет получить уравнение

$$q_1 q_2 + m^2 = p_1 \cdot (q_1 - q_2), \quad (A,2)$$

которое в лабораторной системе приобретает вид

$$q_1 q_2 \cos \vartheta = \varepsilon E + m^2 = -M(E - \varepsilon) \quad (A,3)$$

и может рассматриваться как уравнение относительно энергии рассеянной частицы  $q_1 = \sqrt{E^2 - m^2}$ ,  $q_2 = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$

$$(E^2 - m^2)(\varepsilon^2 - m^2) \cos^2 \vartheta = \varepsilon^2 (E + M)^2 - 2\varepsilon(E + M)(m^2 + ME) + (m^2 + ME)^2$$

$$\varepsilon = \frac{(E + M)(m^2 + ME) \pm \sqrt{(E + M)^2(m^2 + ME)^2 - [(E + M)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \vartheta](m^2 + ME)^2 + m^2(E^2 - m^2) \cos^2 \vartheta}}{(E + M)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \vartheta}$$

$$= \frac{(E + M)(m^2 + ME) \pm (E^2 - m^2) \cos \vartheta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \vartheta}}{(E + M)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \vartheta} \quad (A,4)$$

Знак перед корнем следует выбрать так, чтобы при  $\vartheta = 0$   $\varepsilon = E$ . Этому соответствует знак  $+$ . Если  $M > m$ , то этот знак остается при всех  $\vartheta$ . Если же  $M < m$ , то

при  $\vartheta = \vartheta_0 = \arcsin \frac{M}{m}$  корень обращается в нуль, и углы  $\vartheta > \vartheta_0$  невозможны /  $\vartheta_0$  — предельный угол/.  
Из закона сохранения энергии

$$E + M = \varepsilon + e \quad (A,5)$$

находится энергия  $e$  частицы отдачи в зависимости от  $\vartheta$ . Чаше нужно знать зависимость  $e(\varphi)$ . Для нахождения ее исключим из (A,1) импульс  $q_2$ :

$$p_1 \cdot p_2 + M^2 = q_1 \cdot (p_1 - p_2), \quad (A,6)$$

что дает уравнение

$$-M_e + M^2 = -ME - \sqrt{(E^2 - m^2)(e^2 - M^2)} \cos \varphi + eE. \quad (A,7)$$

Решая его относительно  $e$ , получим

$$e = M \frac{(E+M)^2 + (E^2 - m^2) \cos^2 \varphi}{(E+M)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \varphi}. \quad (A,8)$$

Инвариантная передача импульса

$$q^2 = (q_1 - q_2)^2 = (p_2 - p_1)^2 \quad (A,9)$$

может быть теперь выражена как через угол  $\vartheta$ , так и через  $\varphi$ :

$$q^2 = -2(q_1 q_2 + m^2) = 2M(E - \varepsilon) = 2M(E^2 - m^2) \frac{M + E \sin^2 \vartheta - \cos \vartheta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \vartheta}}{(E+M)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \varphi} \quad (A,10)$$

$$q^2 = 2M(e - M) = 4M^2 \frac{(E^2 - m^2) \cos^2 \varphi}{(E+M)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \varphi}. \quad (A,11)$$

Полученные формулы упрощаются при рассеянии релятивистских частиц  $|M \gg E \gg m|$  :

$$\varepsilon = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} ; \quad q^2 = \frac{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} . \quad (A,12)$$

2. Рассмотрим тот же процесс в системе центра масс /с.ц.м./. По определению  $\vec{q}_1 = -\vec{p}_1 = \vec{p}_c$  . Из сохранения импульса следует, что  $\vec{q}_2 = -\vec{p}_2 = \vec{p}_c'$  , а из сохранения энергии

$$\mathcal{W} = \sqrt{p_c^2 + m^2} + \sqrt{p_c^2 + M^2} = \sqrt{p_c'^2 + m^2} + \sqrt{p_c'^2 + M^2} , \quad (A,13)$$

что  $|\vec{p}_c| = |\vec{p}_c'|$  . Таким образом, в с.ц.м. происходит только поворот импульсов без изменения их величин. Поэтому энергия каждой частицы до и после рассеяния одна и та же. Ее можно связать с  $\mathcal{W}$  - полной энергией в с.ц.м.

$$\mathcal{W}_1 = \sqrt{p_c^2 + m^2} , \quad \mathcal{W}_2 = \sqrt{p_c^2 + M^2} , \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 . \quad (A,14)$$

Очевидно,  $\mathcal{W}_1^2 - \mathcal{W}_2^2 = m^2 - M^2$ , так что

$$\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_2 = \frac{m^2 - M^2}{\mathcal{W}} . \quad (A,15)$$

Таким образом,

$$\mathcal{W}_1 = \frac{\mathcal{W}^2 + m^2 - M^2}{2\mathcal{W}} ; \quad \mathcal{W}_2 = \frac{\mathcal{W}^2 + M^2 - m^2}{2\mathcal{W}} . \quad (A,16)$$

Легко теперь получить выражение

$$p_c^2 = \frac{[\mathcal{W}^2 - (M+m)^2][\mathcal{W}^2 - (M-m)^2]}{4\mathcal{W}^2} ; \quad q^2 = 4p_c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} . \quad (A,17)$$

3. Переход от одной системы к другой проще всего производится, если все величины записывать в инвариантном виде. Из четырех импульсов составляется 10 инвариантов

$$p_K^2 = -M_K^2; \quad p_i \cdot p_K; \quad (A, 18)$$

которые выражаются через массы частиц и переменные Мандельштама

$$s = -(p_1 + q_1)^2; \quad t = -(p_1 - p_2)^2; \quad u = -(p_1 - q_2)^2. \quad (A, 19)$$

$$s + t + u = \sum_K M_K^2.$$

по формулам

$$2p_1 q_1 = -k^2 + M_1^2 + M_2^2; \quad q^2 = (p_1 - p_2)^2;$$

$$2p_1 q_2 = -k^2 + M_2^2 + M_3^2 + q^2; \quad (A, 20)$$

Поскольку  $s = k^2 = M^2 + m^2 + 2ME$ , то

$$p_c^2 = \frac{(2ME - 2Mm)(2ME + 2Mm)}{4k^2} = M^2 p_L^2 / k^2. \quad (A, 21)$$

Рассмотрим пересчет углов:

$$d\Omega_c = \sin\theta d\theta d\alpha = 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2} d\alpha = \frac{1}{2p_c^2} dq^2 d\alpha. \quad (A, 22)$$

Выразив  $q^2$  через угол  $\vartheta$ , найдем

$$dq^2 = \frac{2E^2 \sin^2 \vartheta d\vartheta}{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2}; \quad d\Omega_c = \frac{(E^2/p_c^2) d\Omega_L}{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2} \quad (A, 23)$$

$d\Omega_L = \sin\vartheta d\vartheta d\alpha$  - телесный угол в л.с./.

## Приложение Б

### РАССЕЯНИЕ НА АНОМАЛЬНОМ МАГНИТНОМ МОМЕНТЕ

Вычислим след

$$J = S_p \left( A + \lambda_1 \frac{\hat{A}\hat{q} - \hat{q}\hat{A}}{4iM} \right) (-i\hat{p}_1 + M) \left( \hat{B} + \lambda_2 \frac{\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B}}{4iM} \right) (-i\hat{p}_2 + M), \quad (\text{Б}, 1)$$

где  $A, B$  - произвольные векторы, а

$$q = p_1 - p_2. \quad (\text{Б}, 2)$$

Представим  $J$  как полином по  $\lambda$  :

$$J = \sum_{k=1}^4 J_k. \quad (\text{Б}, 3)$$

$$J_1 = S_p \hat{A}(-i\hat{p}_1 + M) \hat{B}(-i\hat{p}_2 + M). \quad (\text{Б}, 4a)$$

$$J_2 = \frac{\lambda_1}{4iM} S_p (\hat{A}\hat{q} - \hat{q}\hat{A})(-i\hat{p}_1 + M) \hat{B}(-i\hat{p}_2 + M). \quad (\text{Б}, 4б)$$

$$J_3 = \frac{\lambda_2}{4iM} S_p \hat{A}(-i\hat{p}_1 + M)(\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B})(-i\hat{p}_2 + M). \quad (\text{Б}, 4в)$$

$$J_4 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{16M^2} S_p (\hat{A}\hat{q} - \hat{q}\hat{A})(-i\hat{p}_1 + M)(\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B})(-i\hat{p}_2 + M). \quad (\text{Б}, 4г)$$

и вычислим последовательно все  $J_k$ .

1.

$$J_1 = 4 \left\{ -(Ap_1)(Bp_2) - (AB)(-p_1 p_2 - M^2)(Ap_2)(Bp_1) \right\} \quad (\text{Б}, 5)$$



Как это, так и дальнейшие выражения, симметризируются введением величины

$$P = (p_1 + p_2)/2 \quad (\text{Б}, 6)$$

со свойствами

$$P \cdot q = 0 ; \quad P^2 = -M^2 - q^2/4. \quad (\text{Б}, 7)$$

Подставляя

$$p_1 = P + q/2 ; \quad p_2 = P - q/2 ; \quad p_1 \cdot p_2 + M^2 = -q^2/2. \quad (\text{Б}, 8)$$

приводим  $J_1$  к виду

$$J_1 = -2 \left\{ 4(AP)(BP) - (Aq)(Bq) + q^2(AB) \right\}. \quad (\text{Б}, 9)$$

2. При вычислении  $J_2$  пользуемся формулой

$$S_{\mu}(\hat{K}\hat{L} - \hat{L}\hat{K})\hat{M}\hat{N} = 8(KN)(LM) - 8(KM)(LN), \quad (\text{Б}, 10)$$

которая легко доказывается при произвольных векторах  $K, L, M, N$ .

$$J_2 = \frac{\lambda_1}{4i} S_{\mu}(\hat{A}\hat{q} - \hat{q}\hat{A})(-i\hat{p}_1\hat{B} - i\hat{B}\hat{p}_2) = -2\lambda_1 \left\{ (AB)(qp_1) - (Ap_1)(Bq) + \right. \\ \left. + (Ap_2)(Bq) - (AB)(qp_2) \right\} = -2\lambda_1 [q^2(AB) - (Aq)(Bq)]. \quad (\text{Б}, 11)$$

Очевидно,

$$J_3 = 2\lambda_2 [q^2(AB) - (Aq)(Bq)]. \quad (\text{Б}, 12)$$

3.

$$J_4 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{16\mu^2} S_p(\hat{A}\hat{q} - \hat{q}\hat{A})[-\hat{r}_1(\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B})\hat{r}_2 + \mu^2(\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B})].$$

Подставим  $r_2 = r_1 - q$  и воспользуемся тождествами

$$\hat{r}_1(\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B})\hat{r}_1 = 2(Br_1)(\hat{q}\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{q}) - 2(qr_1)(\hat{B}\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{B}) + \mu^2(\hat{q}\hat{B} - \hat{B}\hat{q}). \quad (\text{Б}, 13)$$

$$(\hat{B}\hat{q} - \hat{q}\hat{B})\hat{q} = 2q^2\hat{B} - 2\hat{q}(Bq) \quad (\text{Б}, 14)$$

Тогда

$$J_4 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{16\mu^2} S_p(\hat{A}\hat{q} - \hat{q}\hat{A})[-2(Br_1)(\hat{q}\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{q}) + 2(qr_1)(\hat{B}\hat{r}_1 - \hat{r}_1\hat{B}) - 2\mu^2(\hat{q}\hat{B} - \hat{B}\hat{q}) + 2q^2\hat{r}_1\hat{B} - 2(Bq)\hat{r}_1\hat{q}]. \quad (\text{Б}, 15)$$

При вычислении необходимо  $S_p(\hat{K}\hat{L} - \hat{L}\hat{K})(\hat{M}\hat{N} - \hat{N}\hat{M})$ , который находится из (Б, 10) и имеет вдвое большую величину, чем указанная в той формуле. Таким образом,

$$\begin{aligned} J_4 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{16\mu^2} 8 \left\{ -4(Br_1)[(Ar_1)q^2 - (Aq)(qr_1)] + 4(qr_1)[(Ar_1)(Bq) - (AB)(qr_1)] - \right. \\ &\quad - 4\mu^2[(AB)q^2 - (Aq)(Bq)] + 2q^2[(AB)(qr_1) - (Ar_1)(Bq)] - \\ &\quad \left. - 2(Bq)[(Aq)(qr_1) - q^2(Ar_1)] \right\} = \\ &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\mu^2} \left\{ -4q^2(Ar_1)(Br_1) + 2q^2(Aq)(Br_1) + 2q^2(Ar_1)(Bq) - \right. \\ &\quad \left. - 4\mu^2[q^2(AB) - (Aq)(Bq)] - q^2(Aq)(Bq) \right\}. \end{aligned}$$

/использовалось вытекающее из (Б,2) равенство  
 $\mu \cdot q = q^2/2$  /. С помощью замены (Б,8) находим

$$J_4 = 2 \lambda_1 \lambda_2 \left\{ q^2 (AB) - (Aq)(Bq) + q^2 \frac{(AP)(BP)}{\mu^2} \right\}. \quad (\text{Б,16})$$

Итак, если написать

$$J = \sum_{\mu, \nu} A_\mu B_\nu J_{\mu\nu}, \quad (\text{Б,17})$$

то

$$J_{\mu\nu} = -2 (4P_\mu P_\nu + q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) + 2(\lambda_2 - \lambda_1)(q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) + \\ + 2 \lambda_1 \lambda_2 (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu + q^2 \frac{P_\mu P_\nu}{\mu^2}). \quad (\text{Б,18})$$

Отметим следующие свойства полученного выражения

$$J_{\mu\nu} = J_{\nu\mu}; \quad q_\nu J_{\mu\nu} = q_\mu J_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{Б,19})$$

Иногда необходима величина  $J_{\mu\mu}$ . Она равна

$$J_{\mu\mu} = -4(q^2 - 2\mu^2) + 6(\lambda_2 - \lambda_1)q^2 + \lambda_1 \lambda_2 \left(4 - \frac{q^2}{2\mu^2}\right). \quad (\text{Б,20})$$

## Приложение В

### СВЯЗЬ ДИСПЕРСИОННЫХ, ИЗОТОПИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ АМПЛИТУД

В § 10 были введены дисперсионные амплитуды рассеяния

$$\mathcal{M} = A^{(+)} \delta_{kl} + A^{(-)} \frac{1}{2} [\hat{\tau}_e, \hat{\tau}_k]. \quad (B,1)$$

Кроме них, встречаются и другие определения. Так если в начальном состоянии изо-спин имел определенное значение  $T$ , то в силу изотоп-инвариантности он будет сохранять его и во все время взаимодействия, а амплитуда рассеяния будет иметь определенную величину  $A_T$  /  $T = 1/2$  или  $3/2$  /. Две изотопические амплитуды  $A_{1/2}$ ,  $A_{3/2}$  линейно выражаются через  $A^{(+)}$ ,  $A^{(-)}$ .

На опыте не наблюдаются ни те, ни другие, а амплитуды конкретных физических процессов

$$\begin{array}{llll} p^+ \rightarrow p^+ & p^0 \rightarrow p^0 & p^+ \rightarrow n^+ & n^0 \rightarrow p^- \\ p^- \rightarrow p^- & p^0 \rightarrow n^+ & n^+ \rightarrow p^0 & \\ p^- \rightarrow n^0 & n^- \rightarrow n^- & n^0 \rightarrow n^0 & \end{array} \quad (B,2)$$

общим числом 10. Это - так называемые физические амплитуды.

Уже требование зарядовой симметрии позволяет уменьшить число физических амплитуд вдвое: в уравнении (B,2) производится замена  $p \rightleftharpoons n, \pi^+ \rightleftharpoons \pi^-$ , не меняющая амплитуды.

Инвариантность относительно обращения времени позволяет свести амплитуду реакции  $p^0 \rightarrow n^+$  к амплитуде  $n^+ \rightarrow p^0$ , которая равна  $A(p^- \rightarrow n^0)$ .

Таким образом, остается три реакции обычного рассеяния

$$\mu^+ \rightarrow \mu^+ ; \mu^- \rightarrow \mu^- ; \mu^0 \rightarrow \mu^0 \quad (\text{B},3)$$

и одна обменная

$$\mu^- \rightarrow \mu^0 \quad (\text{B},4)$$

Если имеет место изотопическая инвариантность, т.е. амплитуда рассеяния может быть записана в виде (B,1), то амплитуды четырех физических процессов выражаются через две величины  $\mathcal{A}^{(\pm)}$ . Чтобы сделать это, заметим, что полное выражение матрицы рассеяния содержит произведения

$$\varphi_c^* \varphi_k \delta_{kl} = \check{\varphi}_1 \varphi_1 + \check{\varphi}_2 \varphi_2 + \check{\varphi}_3 \varphi_3 = \check{\varphi}_+ \varphi_+ + \check{\varphi}_- \varphi_- + \check{\varphi}_0 \varphi_0 \quad (\text{B},5)$$

$$\varphi_+ = (\varphi_1 - i\varphi_2)/\sqrt{2}, \quad \varphi_- = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2} \quad (\text{B},5a)$$

$$\begin{aligned} \check{\varphi}_c \varphi_k \tau_c \tau_k &= (\check{\varphi}_1 \tau_1 + \check{\varphi}_2 \tau_2 + \check{\varphi}_3 \tau_3)(\varphi_1 \tau_1 + \varphi_2 \tau_2 + \varphi_3 \tau_3) = \\ &= (\check{\varphi}_+ \tau_- + \check{\varphi}_- \tau_+ + \check{\varphi}_0 \tau_0)(\varphi_+ \tau_+ + \varphi_- \tau_- + \varphi_0 \tau_0). \end{aligned} \quad (\text{B},6)$$

Поэтому в амплитуде (B,1) индексы  $k, \ell$  могут пробегать значения  $\pm, 0$  вместо 1, 2, 3. Выбирая из суммы по  $k, \ell$  члены, соответствующие изучаемой реакции, мы в качестве коэффициентов при них получим искомую амплитуду.

Например,  $\mathcal{A}(\mathcal{N}^+ \rightarrow \mathcal{N}^+)$  получится как коэффициент при  $\check{\varphi}_+ \varphi_+$  в выражении

$$\langle \mathcal{N}^+ | \check{\varphi}_c \varphi_k (\mathcal{A}^{(+)} \delta_{kl} + \mathcal{A}^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_\ell, \tau_k]) | \mathcal{N}^+ \rangle,$$

т.е.

$$A(N_+ \rightarrow N_+) = A^{(+)} + \frac{1}{2} A^{(-)} \langle N | [\tau_-, \tau_+] | N \rangle. \quad (B,7)$$

С помощью (9,13-14) находим

$$[\tau_-, \tau_+] = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \langle p | [\tau_-, \tau_+] | p \rangle &= -2 \\ \langle n | [\tau_-, \tau_+] | n \rangle &= 2 \end{aligned} \quad (B,8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A(p+ \rightarrow p+) &= A(n- \rightarrow n-) = A^{(+)} - A^{(-)} \\ A(n+ \rightarrow n+) &= A(p- \rightarrow p-) = A^{(+)} + A^{(-)} \\ A(p0 \rightarrow p0) &= A(n0 \rightarrow n0) = A^{(+)} \end{aligned} \quad (B,9)$$

Последнее получается сразу, так как  $[\tau_0, \tau_0] = 0$ .

В амплитуду обменного рассеяния входит  $[\tau_-, \tau_0] = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , так что

$$A(p- \rightarrow n0) = A(n+ \rightarrow p0) = -\sqrt{2} A^{(-)}. \quad (B,10)$$

Остается только связать изотопические и физические амплитуды:

$$A(p+) = A_{3/2}; \quad A(p-) = \frac{1}{3} (A_{3/2} + 2 A_{1/2}). \quad (B,11)$$

Поэтому

$$A_{3/2} = A^{(+)} - A^{(-)}; \quad A_{1/2} = A^{(+)} + 2 A^{(-)}. \quad (B,12)$$

## Литература

1. T.D.Lee, Phys.Rev., 95, 1329 (1954).  
W.E.Thirring, Ann.Physik, 9, 91, (1958).  
T.Ruijgrok, L. Van Hove, Physica, 22, 880 (1956).
2. W.Heisenberg, Zs.Phys., 120, 513 (1942).
3. Боголюбов Н.Н., Д.В.Ширков, УФН, 55, 149 (1955).
4. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений", Физматгиз, М., 1958 .
5. Д.В.Ширков, Доклад на Киевской конференции, 1959 г.
6. S.Mandelstam, Phys.Rev., 112, 1344 (1958).
7. П.А.М.Дирак, "Основы квантовой механики".
8. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий "Квантовая электродинамика" 2-е изд., Физматгиз, 1959.
9. В.Гайтлер "Квантовая теория излучения", ГИИЛ, 1956.
10. E.Fermi, Rev.Mod.Phys., 4, 98 (1932).
11. R.P.Feynman, Phys.Rev., 76, 749, 769 (1949).
12. O.Klein, Y.Nishina, Zs.Phys., 52, 853 (1929).
13. I.E.Tamm, Zs.Phys., 62, 545 (1930).
14. W.Thirring "Principles of quantum electrodynamics",
15. N.M.Kroll, M.A.Ruderman, Phys.Rev., 92, 233 (1954)  
M.Gell-Mann, M.L.Goldberger, Phys.Rev., 96, 1433 (1954).
16. И.Я.Померанчук, ЖЭТФ, 34, 725 (1958).
17. Р.Хофштадтер статьи в сб. "Электромагнитная структура ядер и нуклонов", ИИЛ, 1958.
18. Э.Резерфорд,
19. Н.Ф.Мотт, В.Месси "Теория атомных столкновений", М., 1951 .
20. E.Rosenbluth, Phys.Rev., 79, 615 (1950)
21. Л.Б.Окунь, Померанчук И.Я. ЖЭТФ, 36, 300 (1959).
22. R.R.Wilson et al., Phys.Rev.Lett., 6, 286 (1961).

23. В.Паули "Релятивистская теория элементарных частиц", ИИЛ, 1947.
24. Б.Росси, К.Грейзен "Взаимодействие космических лучей с веществом", ГИИЛ, 1948.
25. Г.Бете, Е.Солпитер "Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами", Физматгиз, 1960.
26. А.Зоммерфельд "Строение атома и спектры", ГИТТЛ, 1956.
27. Г.Вентцель "Введение в квантовую теорию волновых полей", Гостехиздат, 1947.
28. Б.Росси "Частицы больших энергий", ГИТТЛ, 1955.
29. G.Chew, M.L.Goldberger, F.Low, Y.Nambu, Phys.Rev., 106, 1337 (1957).
30. M.L.Goldberger, H.Miyazawa, R.Oehme, Phys.Rev., 99, 986 (1955).
31. В.Б.Барашенков, В.М.Мальцев, Препринт ОИЯИ, Р-724, 1961 г.
32. D.Amati, M.Fierz, V.Glaser, Phys.Rev.Lett., 4, 89(1960).
33. S.Frautschi, J.Walecka, Phys.Rev., 120, 1486 (1960).
34. "Новый метод в теории сильных взаимодействий", сб. статей, ИИЛ, 1961.
35. G.Chew, S.Frautschi. Phys.Rev., 123, 1478 (1961).
36. Д.И.Блохинцев "Основы квантовой механики" ГИТТЛ, 1949.
37. G.Chew, F.Low, Phys.Rev., 101, 1570 (1956).
38. L.Castillejo, R.Dalitz, F.Dyson, Phys.Rev., 101, 453 (1956).
39. F.Dyson, Phys.Rev., 106, 157 (1957).
40. Е.Янке, Ф.Эмде "Таблицы функций", Физматгиз, 1959.
41. M.Jacob, G.C.Wick, Ann. of Phys., 7, 404 (1960).
42. Н.П.Клепиков, В.А.Мещеряков, В.Н.Соколов, Препринт ОИЯИ, Д-584, 1960 г.
43. J.Hamilton, T.Spearman, Ann. of Phys., 12, 172 (1961).
44. H.L.Anderson, E.Fermi et al., Phys.Rev., 86, 793 (1952).
45. И.Е.Тамм, Ю.А.Гольфанд, В.Я.Файнберг, ЖЭТФ, 26, 649 (1954).



46. G.Takeda, Phys.Rev., 100, 440 (1955).
47. W.Fraser, J.Fulco, Phys.Rev.,Lett., 2, 365 (1959).
48. A.Stanghellini et al., Nuovo Cim.,12 , 569 (1961).
49. F.Zachariasen, Phys.Rev.Lett., 7, 112 (1961).
50. P.Falk-Vairant, G.Valladas, Rev.Mod.Phys., 33, 362  
(1961).
51. Б.П.Банник, В.Г.Гришин, Л.В.Сильвестров, ЭТФ, 40,  
1652 (1961).
52. М.А.Марков "Гипероны и  $K$ -мезоны", Физматгиз, 1958.
53. M.Gell-Mann, Phys.Rev., 106, 1296 (1957).  
Л.Б.Окунь, И.Ю.Кобзарев, ЭТФ, 39, 210 (1960).
54. R.N.Dalitz, S.F.Tuan, Ann. of Phys., 10, 307 (1960).
55. M.Melkanoff, D.Prowse, D.Stork, H.Ticho, Phys.Rev.Lett.,  
5, 108 (1960).
56. Л.В.Альварец, Доклад на Киевской конференции, 1959г.
57. Я.И.Грановский, В.Н.Стариков, ЭТФ, 43, 525 (1962).
58. Я.И.Грановский, В.Н.Стариков, ЭТФ, 40, 537 (1961).
59. E.Fermi, Zs.Phys., 88, 161 (1934).
60. I.G.Tamm, Nature, 133, 981 (1934).  
D.D.Ivanenko, Nature, 133, 981 (1934).
61. B.Pontecorvo, Phys.Rev., 72, 246 (1947). G.Puppi, Nuovo  
Cim., 5, 505 (1958).
62. Л.Мишель, статья в сб. "Физика космических лучей",  
1957.
63. Л.Б.Окунь, УФН, 68, 449 (1959).
64. R.P.Feynman, M.Gell-Mann, Phys.Rev., 109, 193 (1958).
65. Сб. статей "Новые свойства симметрии элементарных  
частиц", ИИЛ, 1957.
66. "Мезон", сб. статей под ред. Тамма, Гостехиздат,  
1947.
67. Э.Ферми "Элементарные частицы", ИИЛ, 1952.
68. Л.Б.Окунь, В.М.Шехтер, ЭТФ, 34, 1250 (1958).
69. H.L.Anderson, C.M.G.Lattes, Nuovo Cim., 6, 1356 (1957).
70. A.Tollestrup et al., Phys.Rev.Lett., 1, 247 (1958).

71. M.L.Golberger, S.Treiman, Phys.Rev., 111, 355 (1958).  
Чжоу Гуан-чжао, ЛЭТФ, 39, 703 (1960).  
J.Bernstein, S.Fubini, M.Cell-Mann, W.Thirring,  
Nuovo Cim., 17, 757 (1960).
72. С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович, ЛЭТФ, 29, 698  
(1955).
73. Я.А.Смородинский, УФН, 67 43 (1959) .
74. Я.Б.Зельдович, ЛЭТФ, 97, 421 (1954)/см.также [63]/.
75. Я.А.Смородинский, Ху Ши-кэ, ЛЭТФ, 11, 612 (1961)
76. Л.Б.Окунь "Лекции по теории слабых взаимодействий", изд. ИТЭФ, 1961 г.
77. B.M.Rustad, S.L.Rubi, Phys.Rev., 97, 991 (1955).
78. Дж.Аллен "Нейтрино", ИИЛ, 1960.
79. L.Fierz, Ze.Phys., 102, 572 (1936).
80. W.Hermannsfeldt, J.Allen et al., Phys.Rev.Lett., 1,  
61 (1958).

## Содержание

Предисловие .....	1
Введение .....	3
<u>I</u> глава. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ	
§ 1. Основные принципы квантовой теории .....	5
§ 2. Общий вид дисперсионных соотношений .....	11
§ 3. Вектор состояния взаимодействующих частиц .....	18
<u>II</u> глава. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ	
§ 4. Эффект Комптона .....	29
§ 5. Рассеяние электронов на протонах .....	45
§ 6. Рассеяние $\pi$ -мезонов на электронах .....	61
§ 7. Тормозное излучение и образование пар ...	64
§ 8. Магнитный момент электрона .....	72
<u>III</u> глава. ЯДЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ	
§ 9. Изотопический спин /пионы и нуклоны/ ....	80
§ 10. Структура амплитуды $\pi N$ -рассеяния .....	86
§ 11. Рассеяние вперед. Ядерная константа связи.	89
§ 12. Теория эффективного радиуса .....	95
§ 13. Парциальные амплитуды $\pi N$ -рассеяния .....	101
§ 14. Резонансные "частицы". $\pi\pi$ -резонанс .....	108
§ 15. Общий взгляд на теорию $\pi N$ -рассеяния .....	112
§ 16. Странные частицы .....	113
§ 17. Рассеяние $K$ -мезонов на нейтронах вперед..	117
<u>IV</u> глава. СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ	
§ 18. Универсальность слабого взаимодействия..	127
§ 19. Распад $\mu$ -мезона .....	134
§ 20. Распад $\pi$ -мезона .....	145
§ 21. $\beta$ -распад нейтрона .....	153

Приложение А. Кинематика упругого рассеяния....	161
Приложение Б. Рассеяние на аномальном магнитном момента .....	165
Приложение В. Связь дисперсионных, изотопических и физических амплитуд .....	169
Литература .....	172

Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Кийикооли, 18

Я.А.Грановский  
ДИСПЕРСИОННАЯ ТЕОРИЯ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ  
На русском языке

Ответственный редактор Р.Лмас  
Корректор А.А.Пантышин

Ротапринт ТГУ 1965 г. Печ.листов II,2 (условных IO,I).

Учетн.издат.листов 9,84. Тираж 500 экз.

Сдано в печать 24/XI 1965 г.

МВ-IO4II. Заказ № 47I.

Цена 30 коп.